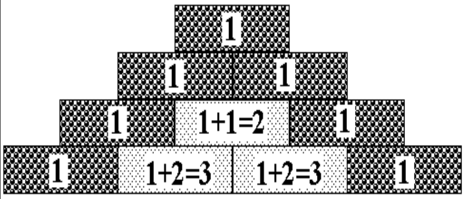
ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ЎЗБЕКИСТОН ДАВЛАТ ЖАҲОН ТИЛЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ

Ш.Н.ИСМАИЛОВ

Mathematics is a language. —Josiah Willard Gibbs (1839–1903)

4	9	2
3	5	7
8	1	6



٤	٩	٢
٣	٥	٧
٨	١	٦

Олий математика асослари

фанидан маърузалар

Билим соҳаси: 100000 – Гуманитар соҳа
200000 – Ижтимоий соҳа, иқтисод ва ҳуқуқ

Таълим соҳаси: 110000 – Педагогика
120000 – Гуманитар фанлар
220000 – Журналистика ва ахборот

Таълим йўналиши: 5111400 – Хорижий тил ва адабиёти (тиллар бўйича)
5111300 – Она тили ва адабиёти (ўзга тилли гуруҳларда)
5120100 – Филология ва тилларни ўқитиш (тиллар бўйича)
5120200 – Таржима назарияси ва амалиёти (тиллар бўйича)
5220100 – Журналистика

Тошкент – 2014

1-маъруза. Математика фани тушунчаси ва моҳияти (2 соат).
Таянч тушунчалар: Математиканинг замонавий дунёда, жаҳон маданияти ва тарихида, жумладан гуманитар фанларда ўрни. Замонавий математиканинг структураси. Математик тафаккур, индукция ва дедукция. Теоремалар, аксиомалар, таърифлар, аксиоматик усул. Евклид геометрияси биринчи аксиоматик назарияси сифатида. Математиканинг тили, унинг моҳияти ва камчиликлари.

Математика[1] - *аниқ мантиқий мушоҳадаларга асосланган билимлар ҳақидаги фан* деб эътироф этилган [2].

Ҳозирги кунда математика шартли равишда элементар ва олий математика каби қисмларга ажралади. Уларнинг **структураси** қуйидагича:
Элементар математика: арифметика, элементар алгебра, элементар геометрия (планиметрия ва стереометрия), элементар функциялар назарияси ва анализ элементлари.
Олий математика: математик таҳлил, алгебра, аналитик геометрия, чизиқли алгебра ва геометрия, дискрет математика, математик мантиқ, дифференциал тенгламалар, дифференциал геометрия, топология, функционал анализ ва интеграл тенгламалар, функциялар назарияси, эҳтимолликлар назарияси, математик статистика, вариацион ҳисоб ва оптималлаштириш усуллари, сонли усуллар, сонлар назарияси.

Математика энг қадимий фан соҳаси бўлиб, узоқ ривожланиш тарихини босиб ўтган ва бунинг баробарида «Математика нима?» деган саволга жавоб ҳам ўзгариб, чуқурлашиб борган.

Элементар математика даврида дастлабки объекти саноқ бўлгани учун кўпинча унга *«ҳисоб-китоб ҳақидаги фан»* деб қаралган (аммо бугунги математикада ҳисоблашлар, ҳатто формулалар устидаги амаллар жуда кичик ўрин эгаллайди).

Замонавий математика (баъзан “олий математика” дейишади) даврининг бошланғич нуқтаси деб 17-аср – математик таҳлилнинг пайдо бўлиш асри қабул қилинган.

Бу пайтда аналитик геометрия ва алгебра символикаси вужудга келди. 17 –аср оҳирига келиб И.Ньютон, Г.Лейбниц ва уларнинг ўтмишдошлари томонидан янги математик аппарат - дифференциал ва интеграл ҳисоб яратилди. Бу аппарат математик таҳлилнинг асосини ва , таъбир жоиз бўлса, ҳатто умуман ҳозирги замон табиатшунослигининг математик асосини ташкил этади.

Бу даврда математика «*Микдорий муносабатлар ва фазовий шакллар ҳақидаги фан*» мазмунида таърифланган.

Математик маданият — умуминсоний маданиятнинг таркибий қисми ҳисобланади. Барчамизга маълумки, математика фани инсоннинг ақлини ўстиради, унинг диққатини ривожлантиради, кўзланган (ривожлантирилган) мақсадга эришиш учун ўзида қатъият ва иродани тарбиялайди, ўзидаги алгоритмик тарздаги тартиб-интизомлиликни таъминлайди ва энг муҳими унинг тафаккури кенгаяди.

Математика оламни, дунёни билишнинг асоси бўлиб, теварак-атрофимиздаги воқеа ва ҳодисаларнинг ўзига хос қонуниятларини очиб беришда аҳамияти жуда катта.

Математикада борлиқ, асосан, **математик моделлар** ёрдамида идеаллашган ҳолда инъикос қилинади. Идеаллаштириш жараёнида мавжуд объектлар ҳақидаги эмпирик билимга таянган ҳолда, ҳақиқатда мавжуд бўлмаган ва баъзан мавжуд бўлиши мумкин ҳам бўлмаган, лекин реал мавжуд предметларга маълум бир муносабатда ўхшаш объектлар ҳақидаги тушунчалар ҳосил қилинади.

Тадқиқ қилинаётган жараён ва ҳодисалардаги қонуниятлар математик белгилар ёрдамида ихчам кўринишда ифода этилиб уларнинг математик модели қурилади ва ўрганилади. **Математик моделлаштириш** ташқи дунёни билиш ҳамда башорат қилиш ва бошқариш учун самарали усул ҳисобланади.

Ватанимизнинг гуллаб-яшнаши, барқарор ривожланиши маълум бир даражада ёшларнинг чуқур билимга, мустаҳкам ишонч-эътиқодга ва, умуман, комил инсон бўлишларига боғлиқ.

Бу ҳақда Президентимиз шундай деб таъкидлаган: «Комил инсон деганда биз, аввало, онги юксак, мустақил фикрлай оладиган, хулқ-атвори билан ўзгаларга ибрат бўла оладиган,

[1] инг. mathematics, қад. юн. μάθημα — билим, фан
[2] https://uz.wikipedia.org/wiki/Matematika

билимли, маърифатли кишиларни тушунамиз. Онгли, билимли одамларни олди-қочди гаплар билан алдаб бўлмайди. У ҳар бир нарсани ақл, мантиқ тарозисига солиб кўради. Ўз фикр-ўйи, хулосасини мантиқ асосида қурган киши етук одам бўлади»[3].

Тафаккур – воқеликни билишдан иборат бўлган ақлий фаолиятнинг юксак шакли. У фикр юритиш жараёнида ўзида акс эттирган, идрок қилган, тасаввур этган нарса ва ҳодисаларнинг ҳақиқийлигини аниқлайди, ҳосил қилинган ҳукмлар, тушунчалар, хулосалар чин ёки чин эмаслигини белгилаб олади.

Тафаккур воқеликни умумлаштирилган ҳолда, қонуний боғланишларни сўз ва тажриба воситасида акс эттиришдир. Шунинг учун ҳам, инсон тафаккури тил билан чамбарчас боғлиқдир.

Математикада тафаккур юритиш **мантиқий қонунлар** асосида амалга оширилади.

Математик тафаккур деганда ўзаро боғланган мантиқий амаллар мажмуаси тушунилади; математик тилнинг белги системалари билан ишлаш; фазовий тасаввурни қабул қилиш; шунингдек «хусусий холларда аниқланган, қонуниятларни умумлаштириш; индуктив исботлар; аналогия бўйича исботлар; муайян холларда математик тушунчаларни топиш ёки улар асосида шундай холларни кўриш» (Д.Поя).

Шуни айтиш лозимки, математик таффакур фақат мантиқий амалларга таянмайди. Масалани тўғри қўйилиши ҳамда унинг ечимини танлаб олишни баҳолаш учун математик интуиция муҳим рол ўйнайди.

Таъриф — аввалдан маълум тушунчалар асосида янги тушунча киритишга хизмат қиладиган математик жумла.

Таърифлаш билишда қуйидаги асосий вазифаларни ҳал қилишда ёрдам беради: 1) тушунчада акс этувчи предметнинг муҳим белгиларини кўрсатади; 2) тушунчани ифода қилувчи сўзнинг (терминнинг) маъносини очиб беради; 3) термин ҳосил қилишга имкон беради. Таърифда одатда “дейилади” (ёки “деб аталади”, “деб юритилади” ва ҳ.к.) сўзлари иштирок этади.

Исбот — мулоҳаза, ҳукм, назариянинг чинлигини аниқлаш (асослаш). Исботнинг объектив метод орқали мантиқий ишончга олиб борадиган тури ва инсон ҳис-туйғулари, майлларига асосланиб руҳий ишончга олиб келадиган тури мавжуд. Мантиқий исботнинг тузилиш жиҳатдан *тезис* (исботланиши керак бўлган фикр), *асос* (тезисни исботи учун келтирилган далиллар) исботидан иборат. Исбот фан ва амалиётда доим қўлланадиган фикрлаш усулидир.

Математикада мулоҳаза юритишнинг дедукция ва индукция деб номланган икки муҳим усули мавжуд.

Индукция — айрим фикрлардан умумий хулосалар чиқаришда ва мантиқий тадқиқотларда қўлланиладиган муҳокама усули. Хусусийликни ўрганиб, умумийлик билиб олинади. Умумийлик предмет ва ҳодисалар билан узвий алоқада бўлади. Индукция билимларнинг ташкил топишида, қонуниятларни очишда, тушунчаларни майдонга чиқариш жараёнида, гипотезани олға суришда фан учун муҳим аҳамиятга эга.

Дедукция — мантиқ қоидаларига кўра хулоса чиқариш. Дастлаб формал мантиқда умумийликдан хусусийлик, айримлик томон муҳокама юритиш дедукция деб аталган. Масалан, «Барча инсонлар боқий эмас” ва «Сократ — инсон» деган икки ҳукмдан дедуктив йўл билан «Сократ боқий эмас» деган янги ҳукм (хулоса) чиқарилади.

Ҳозирги замон фанида «Дедукция» термини кенг маънода қўлланилиб, муайян ҳукмдан мантиқ қонунлари асосида хулоса чиқариш тушунилади. Агар асос қилиб олинган ҳукм ҳақиқий ва дедукция қонунларига риоя қилинган бўлса, ундан чиқариладиган хулоса ҳам ҳақиқий бўлади.

Ўз-ўзидан равшанлиги, аёнлиги сабабли исботсиз қабул қилинадиган ҳолат, тасдиқ, фикр *аксиома* деб аталишини эслатиб ўтамиз.

Дедуктив метод турли шаклларда, хусусан *аксиоматик метод*, шунингдек, гипотетик — дедуктив метод шаклида учрайди. Мавжуд фактик материаллардан дедуктив йўл билан назария яратишда асос бўладиган фикрлар мажмуаси (аксиома ва бошқалар) танлаб олиниб, мантиқ қонунлари асосида улардан бошқа билимлар ҳосил қилинади.

---

[3] Каримов И.А. Тарихий хотирасиз келажак йўқ. //Асарлар тўплами. 7 жилд. - Т.: “Ўзбекистон”, 1999, 134-бет.

Аксиоматик метод биринчи марта қадимги юнон геометрлари асарларида шакллана бошлаган. Евклиднинг «Негизлар» (милоддан аввал 300-йиллар) асарида баён этилган геометрик система аксиоматик усул билан назария қуриш намунасидир. Бу асар жами бўлиб 13 бобдан иборат бўлиб, унинг 1-4 бобларида планиметриянинг аксиоматик назарияси қурилган. Мазкур геометриянинг асосий аксиоматик тушунчалари «нуқта», «тўғри чизиқ», «текислик» бўлиб, улар идеал фазовий объектлар сифатида олиб қаралган; геометриянинг ўзи эса физикавий фазонинг хусусиятларини ўрганувчи таълимот сифатида талқин қилинган. Евклид геометриясининг қолган барча тушунчалари улар ёрдамида ҳосил қилинган.

Евклиднинг «Негизлари» деярли барча асосий тилларга таржима қилинган.

19-аср охири ва 20-аср бошларида турли геометриялар (Лобачевский геометрияси, Проектив геометрия, Риман геометрияси каби), алгебралар (Буль алгебраси, кватернионлар алгебраси, Кэли алгебраси каби), чексиз ўлчовли фазолар каби мазмунан жуда хилма-хил, кўпинча сунъий табиатли объектлар ўрганила бошланиши билан математиканинг юқоридаги таърифи ўта тор бўлиб қолган. Бу даврда математик мантиқ ва тўпламлар назарияси асосида ўзига хос мушоҳада услуби ҳамда тили шаклланиши натижасида математикада энг асосий хусусият — қатъий мантиқий мушоҳада, деган ғоя вужудга келди (Ж. Пеано, Г. Фреге, Б. Рассел, Д. Гильберт).

19-аср охири— 20-аср бошларига келиб математика асосларини мустаҳкамлаш бўйича катта қадамлар қўйилди: ҳақиқий сонлар назарияси тугалланди (Вейерштрасс, Дедекинд), математик мантиқ шаклланди (Пеано, Фреге), функциялар назарияси яратилди (Риман, Лебег, Фубини, Стилтьес), геометриянинг аксиомалар системаси такомилга етказилди (Гильберт), тўплам тушунчасининг аҳамияти англанди, бу тушунча асосида геометрия каби бутун математикани ҳам қатъий аксиомалар асосига қуришга ишонч пайдо бўлди.

19-аср иккинчи ярмидан математиканинг турли соҳалари аксиоматик метод билан қурила бошланди (турли геометриялар, арифметика, эҳтимоллар назарияси ва б.). Аксиоматик методнинг кейинги тараққиёти, мукаммалашуви Д. Гильберт киритган формал система ва формализм методи билан боғлиқ.

Аммо математика асосларига чуқурроқ киришилгани сайин муаммолар ҳам ўткирлашиб борди — 20-асрнинг бошлари математика тарихидаги энг чукур инқирозга тўқнаш келди — математиканинг асосларида чукур зиддиятлар очила бошлади (Бурали — Форти, Рассел, Ришар, Греллинг парадокслари). Уларни енгиб ўтиш йўлидаги уринишлар натижасида тўпламлар назариясининг аксиоматик назарияси яратилди (Цермело, Френкель, Бернайс, Ж. Фон Нейман) ва «математика биноси яхлит мукаммал лойиҳа асосига қурилгани» ҳақидаги Гильберт тасаввури қайта тикланди.

20-аср ўрталарида Бурбаки тахаллуси остида математика асосларини қайта кўриб чиққан бир гуруҳ француз математиклари «*Математика —математик структуралар мажмуаси* » деган таъриф киритди.

Бурбакига кўра ҳозирги замон математикаси қуйидаги иккита тезис билан характерланади:

А. Бутун математика асосида соф тўпламлар назарияси ётади

Б. Математиканинг махсус бўлимларида структуралар ўрганилади. Структуралар турлари тўпламлар назарияси тилида ифодаланган аксиомалар тизими билан аниқланган. Математика шу қабул қилинган аксиомалар тизимидан келиб чиққан структураларнинг ҳоссаларини ўрганади.

Абстракт математик структуралар фақат аксиоматик тизимлардагина эмас, балки формаллашган (яъни формулаларга асосланган) назарий тизимларда ҳам тасвирланиши ва тушунтирилиши мумкин.

Фанда формаллашган назариялар кенг қўлланилади. Бунга мисол қилиб тўпламлар назарияси, математик мантиқдаги мулоҳазалар ҳисобини кўрсатиш мумкин.
Шунингдек, у бошқа фанларда ҳам учрайди.

Ҳозирги замон тилшунослигида тил ўзига хос семиологик система (белги-ишоралар системаси), яъни *“тил ғояларни ифодаловчи белгилар системаси”* эканлиги қабул қилиниб, жамиятда асосий ва энг муҳим фикр алмашиш қуроли, жамият тафаккурининг ривожланишини таъминловчи, авлоддан—авлодга маданий—тарихий анъаналарни етказувчи восита хизматини ўташи тақидланган.

Ҳақиқатдан ҳам ҳар бир тил махсус сигналлар (фонемалар, морфемалар, лексемалар, сингаксемалар ва стилистик усуллар) коди сифатида қаралиб, ахборотларни узатиш мақсадида махсус структурани ташкил этади.

20-асрнинг 50-йиллардан бошлаб математиканинг табиий тилни ҳосил қилган объектлар билан баъзи бир жиҳатлардан ўхшаш бўлган мавҳум структураларни ўрганувчи **математик лингвистика** (лот. lingua – тил) деб номланган фан вужудга келди.

Математик лингвистика тилшунослик бўлими сифатида табиий тиллар ҳодисаларини ва уларни тадқиқ этиш жараёнларини мавҳумий-семиотик моделлаштириш усулидан фойдаланади; математик фан сифатида эса ана шу моделларнинг энг умумий хоссаларини тадқиқ этади ва уларнинг тузилиш усулларини ўрганади.

Унинг асосий тушунчалари — асос қилиб олинган белги-ишоралар (алифбо, луғат) ва маълум алифбо белги-ишораларининг кетма-кетликлари (сўз шакллар, иборалар) каби тушунчалардир. Бу асосий тушунчалар тилшуносликнинг ҳар бир сатҳида қўлланади. Шунинг учун ҳам ўз мақсад-вазифасига кура, математик лингвистика энг аввало назарий тилшунослик воситаси ҳисобланади.

Айни пайтда унинг усуллари амалий лингвистик тадқиқотларда — матнга автоматик ишлов беришда, замонавий компьютер воситалари ёрдамида оғзаки мулоқотнинг автоматик тарзда анализ ва синтез қилишда, ахборотларни қайта ишлашда, автоматик таржима тизимларини яратишда, инсон ва компьютер ўртасидаги алоқа билан боғлиқ тадқиқотларда кенг қўлланмоқда.

Математика тили. Математика ҳам ўз алифбосига эгадир. Бу алифбо ҳарфлар, рақамлар ва махсус белгилардан ташкил этилиб, уларнинг ҳар бири ўз навбатида яхлит деб қабул қилинган белгилардан иборатдир. Математик белгилар - математикага оид билимларни ёзувда ифодалаш учун қўлланадиган белгилардир. Ҳозирги замон математикасининг кўплаб натижаларини ривожланган ва қулай белгиларсиз тасаввур қилиш мумкин эмас.

Кенг маънода айтсак математик тил ҳудди табиий тилдек алифбо, сўзлар, грамматика, бу тилда турли матнлардан ташкил топган. Математик тилда сўзлар ва грамматиканинг аналоги сифатида математик белгилар, аксиомалар, теоремалар, таърифлар, матнлар аналоги сифатида эса математик моделлар деб қаралса бўлади.

Халқаро математика иттифоқи томонидан 2000 йилда нашр қилинган “Математика чегаралари ва истиқболлари” номли китобда таниқли олимлар томонидан қуйидаги таъриф келтирилган[4]:

Математика – бу ўзига хос бўлган грамматикага асосланган филологиянинг бўлими.

Математик тилнинг <u>афзалликлари</u>:

1. Махсус белгилар ёрдамида фикрлаш маданиятини эгаллагашга, фикрларни кетма-кет, мантиқан тўғри, аниқ ва рационал ифодалашга имкон яратади
2. Теварак атрофимиздаги воқеа ва ҳодисларни онгли ўрганиш учун катта имкониятларга эга

Математик тилнинг <u>камчиликлари</u>:

1. Ўзига ҳослиги
2. Кўп объектларни образли тасвирлаш имкониятлари чегараланганлиги.

Маърузамиздан келиб чиқиб, қуйидаги дастлабки ҳулосага келамиз:

Математика аксиоматик назариялар ва математик моделларни, улар орасидаги муносабатларни ўрганадиган, хулосалари қатъий мантиқий мушоҳадалар орқали асосланадиган фан сифатида объектив олам, нарса ва ҳодисаларни илмий нуқтаи назардан билишда ниҳоятда катта рол ўйнайди.

Бутун семестр мобайнида биз замонавий математикага оид математик тушунчалар мазмунини, қоидаларни ва усулларни онгли ўзлаштирамиз ҳамда касбий фаолиятга оид масалаларини ечимини топишда математиканинг имкониятлари моҳиятини тушуниб бу мулоҳазанинг ўринли эканлигини кўрсатишга ҳаракат қиламиз.

---

[4] Арнольд В.И. Нужна ли в школе математика? М., МЦНМО, 2001

2,3-маърузалар. Математик мантиқ элементлари (4 соат).

Таянч тушунчалар: Математик мантиқнинг асосий тушунчалари. Мантиқий амаллар ва формулалар. Мулоҳазалар ҳисоби. Предикатлар ва кванторлар. Парадокслар ва софизмлар.

Президентимиз «Тарихий хотирасиз келажак йўқ» номли асарда жуда ўринли таъкидлаб ўтганларидек, «чуқур таҳлил, мантиққа асосланмаган фикр одамларни чалғитади. Фақат баҳс-мунозара, таҳлил меваси бўлган хулосаларгина бизга тўғри йўл кўрсатиши мумкин».

АҚШ да маккартизм ҳаракати авж олган даврда сенаторлардан бири сенатда сўзга чиқиб “Ҳар қандай коммунист менга қарши. Бу инсон эса менга қарши бўлгани сабабли, у коммунист” деган мулоҳазани айтиб ўтди. Бундан кейин бошқа сенатор сўзга чиқиб “Ҳар қандай қуён карамни истеъмол қилади. Мен карамни яхши кўраман. Демак, мен қуёнман” мулоҳаза билан биринчи сенаторнинг гапининг мантиқий нотўғрилигини кўрсатди.

Бошқа мисолни қараймиз.

«Агар барча қарғалар қора бўлса, қора бўлмаган қушларнинг ҳеч бири қарға эмас” мулоҳаза ҳеч бир шубҳасиз тўғридир ва буни тасдиқлаш учун зоология фанининг мутаҳассиси бўлиш асло шарт эмас. Худди шунга ўхшаш, “агар барча куздралар глокали бўлса, глокали бўлмаган нарсаларнинг ҳеч бири – куздра эмас” дейиш учун глокали куздра нималигини билиш шарт эмас.

Биз қатнашаётган тушунчалар (талаба, куздра, инглиз тилини мукаммал билиш-билмаслик, глокали бўлиш-бўлмаслик) мазмунидан қатъий назар тўғри бўлган фикрларга учта мисол келтирдик. Улар ўзининг асли шаклига кўра хақиқатдир. Шу тоифадаги фикр-мулоҳазаларни ўрганиш мантиқнинг вазифасидир. Умумийроқ қилиб айтганда: мантиқ тўғри мулоҳаза юритиш, тўғри фикрлаш усулларини, яъни тўғри фикрлардан тўғри ҳулосалар чиқариш усулларини ўрганади.

Ҳозирги кунда мулоҳазаларни ўрганишда математик методлардан фойдаланилади. Математик мантиқ – фикрлаш жараёнини турли белгилар ёрдамида, математик усул асосида ўрганади.

Мантиқ жараёнини турли математик белгилар билан ифодалашга интилиш Арасту асарларидаёқ кўзга ташланади. 16 – 17 асрларга келиб, механиқа ва математика фани ривожланиши билан математик методни мантиққа тадбиқ этиш имконияти кенгая борди. Немис файласуфи Лейбниц ҳар хил масалаларни ечишга имкон берувчи мантиқий математик метод яратишга интилиб, мантиқни математиклаштиришга асос солди. Мантиқий жараённи математик усуллар ёрдамида ифодалаш асосан 19 асрларга келиб ривожлана бошлади.

Рост ёки ёлғонлигини маълум бўлган дарак гап *мулоҳаза* дейилади[5].

Мулоҳазалар ҳисоби.

“Мулоҳаза” ва “исбот” сўзларининг турмушдаги мазмуни анчайин ҳира ва ноаниқ. Шу сабабли, биринчи бўлиб шу тушунчаларни аниқлаш учун махсус формал (яъни формулаларга таянган) тил ишлатилади.

Биз мулоҳазаларни $A, B, C, \ldots$ ҳарфлар билан белгилаймиз.

Формал тилда мантиқий боғловчилар деб аталувчи махсус белгилардан фойдаланилади: $\wedge, \&$ (конъюнкция, “ва”, “аммо”, “and”, “but”), $\vee$ (дизъюнкция, “ёки”, “or”), $\Rightarrow$ (импликация, “агар ....бўлса, у ҳолда…”, “if…then…”), $\Leftrightarrow$ (эквиваленция, “....бўлиши учун … зарур ва етарли”, “… if and only if…”), $\rceil$ (инкор, “....эмас”) ҳамда кванторлар деб аталувчи $\forall$ (умумийлик, “барча .... лар учун”, “for any …”) ва $\exists$ (мавжудлик, “шундай .... мавжудки”, “there exists …. such that”).

$A, B, C, \ldots$ мулохазаларни инкор, дизъюнкция, конъюнкция, импликация ва эквиваленция мантиқий боғловчилар воситаси билан маълум тартибда бирлаштириб хосил этилган мураккаб мулоҳазага *мантиқий формула* деб айтамиз.

Мантиқий формулалар табиий тилдаги мулоҳазаларнинг математик модели бўлади.

[5] Бунда мулоҳаза бир вақтда ҳам рост, ҳам ёлғон бўла олмайди.

Мисоллар.

Табиий тилдаги мулоҳаза	Мулоҳазанинг мантиқий формуласи
Инкор (Negations) :	
1. Susan is *not* at home.	$\neg S$
2. Money *doesn't* grow on trees.	$\neg M$
3. It's *not true* that all Republicans are wealthy.	$\neg R$
4. It's *not* the case that water is lighter than oil.	$\neg L$
5. It is *false* to claim that happiness is the only intrinsic good.	$\neg H$
Конъюнкция (Conjunctions) :	
6. Woody Allen *and* Steve Martin were philosophy majors.	$A \& M$
7. *Both* Obama *and* McCain focused on the economy.	$O \& M$
8. Kerry won the popular vote, *but* Bush won the electoral vote.	$P \& E$
9. Bush won, *in spite of the fact that* the media were against him.	$B \& M$
10. *Although* it is raining, I am happy.	$R \& H$
11. Many fought bravely; *also* some lost their lives.	$B \& L$
Дизъюнкция (Disjunctions) :	
12. Rick *either* is a fast learner *or* he's very lucky.	$F \vee L$
13. It will rain *or* snow tomorrow morning.	$R \vee S$
Импликация (Conditionals):	
14. *If* anyone has a better plan, *then* I am all ears.	$B \Rightarrow E$
15. You will pass this course, *if* you pass the final.	$F \Rightarrow C$
Эквиваленция (Biconditionals):	
16. The liquid is an acid *if, and only if,* the litmus paper is blue.	$A \Leftrightarrow B$
17. Today's lunch is nutritious *just in case* it is well balanced.	$N \Leftrightarrow W$

Содда мулоҳазалар ҳамда мантиқий амаллар ёрдамида мураккаброқ формулаларни тузиш мумкин.

Мисол. A : “Ali watched General Hospital[6]”; B :“Betsy watched General Hospital”;

F : “Betsy flunked math exam”; M : “a miracle occurred” мулоҳазалар берилган бўлсин. У ҳолда қуйидагиларга эга бўламиз:

1. $A \ \& \neg B$: “Ali watched General Hospital, but Betsy didn't”.
2. $A \Rightarrow \neg B$: “If Ali watched General Hospital,then Betsy didn't”.
3. $B \Rightarrow (F \vee M)$: “If Betsy watched General Hospital, either she flunked her math exam or a miracle occurred”.
4. $B \& \neg M \Rightarrow F$: “If Betsy watched General Hospital and no miracle occurred, then she flunked her math exam”.
5. $(B \& M) \vee F$: “Either Betsy watched General Hospital and a miracle occurred, or she flunked her math exam. ■

Мулоҳазалар ҳисобида мантиқий формулалар *ростлик жадваллари* ёрдамида изоҳланади. Бундай жадваллар мантиқий боғловчи орқали тузилган мураккаб мулоҳазанинг рост (1) ё рост эмас (0) лигини ташкил этувчи мулоҳазалар ростлигига қараб аниқланади:

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1

Юқоридаги жадвалдан фойдаланиб, янада мураккаброқ мулоҳазалар учун ростлик жадвалини тузиш мумкин.

Мисол учун $((A \vee B) \& (\neg A)) \Rightarrow B$ мулоҳазанинг ростлик жадвалини келтирайлик:

---

[6] General Hospital is an American daytime television medical drama that is listed in Guinness World Records as the longest-running American soap opera in production.

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$(A \vee B) \& (\neg A)$	$((A \vee B) \& (\neg A)) \Rightarrow B$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Жадвални якунлаб, қаралаётган A ва B мулоҳазалар ростлигидан қатъий назар $((A \vee B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow B$ мулоҳаза доим рост бўлишини кўрамиз.

Бу ажабланарли эмас – ахир уни қуйидагича ўқиш мумкин: "Агар A ёки B тўғри бўлса ва A нотўғри бўлса, у ҳолда B нотўғри. ■

Ҳар доим рост бўлган мулоҳаза *мантиқий қонун* ёки *тавтология* дейилади.

Агар $A \Leftrightarrow B$ мулоҳаза тавтология бўлса, у ҳолда A ва B мулоҳазалар *тенг кучли* дейилади ва $A \equiv B$ каби белгиланади.

Тавтологиялар тафаккур қонунлари сифатида фикрлашнинг тўғри амалга ошишини таъминлаб туради. Улар тафаккур шакллари бўлган тушунчалар, мулоҳазалар ҳамда хулоса чиқаришнинг шаклланиши ва ўзаро алоқаларини ифодалайди. Мантиқий қонунларига амал қилиш тўғри, тушунарли, аниқ, изчил, зиддиятсиз, асосланган фикр юритишга имкон беради. Аниқлик, изчиллик, зиддиятлардан холи бўлиш ва исботлилик (асосланганлик) тўғри тафаккурлашнинг асосий белгиларидир. Булар мантиқий қонунларнинг асосини ташкил этувчи белгилар бўлганлиги учун, уларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз.

Асосий мантиқий қонунлар.

1°. $A \,\&\, \neg A \Leftrightarrow 0$ – *зиддиятсизлик қонуни.*

Бу қонун қуйидагича ифодаланади: объектив воқеликдаги буюм ва ҳодисалар бир вақтда, бир хил шароитда бирор хусусиятга ҳам эга бўлиши, ҳам эга бўлмаслиги мумкин эмас.

Масалан, бир вақтнинг ўзида, бир хил шароитда инсон ҳам ахлоқли, ҳам ахлоқсиз бўлиши мумкин эмас.

2°. $A \vee \neg A$ – *учинчисини инкор қилиш қонуни.*

Бу қонун қуйидагича ифодаланади: бир – бирига зид бўлган икки фикрдан бири ҳамиша тўғри (рост) бўлиб, иккинчиси хатодир, учинчиси бўлиши мумкин эмас.

Масалан, бир вақтнинг ўзида, бир хил шароитда инсон ё ахлоқли, ё ахлоқсиз бўлади.

Юқорида келтирилган иккита қонун фикрлаш жараёнида зиддиятга йўл қўймасликни талаб қилади ва тафаккурнинг зиддиятсиз ҳамда изчил бўлишини таъминлайди.

3°. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ - *қўш инкор қонуни.*

«Бу киши илғор эмас деган гап тўғри эмас» деган фикрдан «бу киши илғор» деган фикр келиб чиқади

4°. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow \neg A)$ - *контрапозиция қонуни.*

Бу қонун инкор амали ёрдамида тезис (исботланиши керак бўлган фикр) ва асосни (тезисни исботи учун келтирилган далиллар) ўрниларини алмаштиришга имкон яратади.

Масалан: «Агар шахс чуқур билимга эга бўлса, у ҳолда у комил инсон бўлади" деган мулоҳаза "Комил инсон бўлмаган чуқур билимга эга бўлмайди" деган мулоҳазага тенгкучли.

5°. $\neg(A \,\&\, B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \,\&\, \neg B$ - *де Морган*[7] *қонунлари .*

Де Морган қонунлари инкор амали ёрдамида конъюнкция ва дизъюнкция амалларини бир-бири билан алмаштиришга имкон яратади.

Мисоллар. 1) «Ҳалол ва виждонли инсон ахлоқли бўлади» мулоҳазанинг инкори «Ҳалол бўлмаган ёки виждонли бўлмаган инсон ахлоқсиз бўлади» мулоҳазага тенгкучли.

2) «Мен дарсдан сўнг ё кутубхонага, ё дўстимникига бордим» мулоҳазанинг инкори "Мен дарсдан сўнг кутубхонага ҳам, дўстимникига ҳам бормадим" мулоҳазага тенгкучли.

6°. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$.

Мисол: «Агар бўш вақтим бўлса, унда телевизор кўраман» мулоҳаза «Ёки бўш вақтим бўлмайди, ёки телевизор кўраман» мулоҳазага тенгкучли.

[7] De Morgan (Augustus de Morgan (1806 - 1871) – British Mathematician.

7°. $A \ \& \ B \ \Leftrightarrow B \ \& \ A$; $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ – *коммутативлик қонунлари.*

Коммутативлик қонунлари ўз-ўзидан равшан бўлса ҳам, уларни ўйламасдан қўллашда мантиқий муаммоларга ҳам дучор бўлиш мумкин. Бу ҳолатга Клини[8] мисолини келтирамиз:

A : “Мария турмушга чиқди”; B : “Мария фарзанд кўрди”.

У ҳолда $A \& B$, $B \& A$ формулалар мос равишда қуйидаги тенгкучли бўлмаган талқинларга эга: $A \ \& \ B$: “Мария турмушга чиқди ва фарзанд кўрди”, $B \ \& \ A$: “Мария фарзанд кўрди ва турмушга чиқди”.

Бунинг сабаби, юқоридаги мулоҳазаларда кўринмас ҳолатда вақт параметри иштирок этмоқда.

8°. $A \& (B \ \& \ C) \Leftrightarrow (A \ \& \ B) \& \ C$; $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee \ C$ - *ассоциативлик қонунлари.*

9°. $A \& (B \vee C) \Leftrightarrow (A \ \& \ B) \vee (A \& C)$; $A \vee (B \ \& C) \Leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$ - *дистрибутивлик қонунлари.*

10°. $A \& (B \vee A) \Leftrightarrow A$; $A \vee (B \ \& \ A) \Leftrightarrow A$ - *қисқартириш қонунлари.*

Қуйидаги мантиқий қонунлар фикр юритишнинг тўғри эканлигини исботлаш (*тўғри аргументация*) усулларини ифодалайди:

Т.р.	**Номи**	**Формуласи**	**Маъноси**	**Мисол**
1°.	*Law of Detachment or Modus Ponens*	$((A \Rightarrow B) \& A) \Rightarrow B$	A тўғри бўлганда, B тўғри бўлсин. Бунда A тўғри. Демак, B ҳам тўғри.	If a car has airbags, then it is safe. This car has airbags. Therefore, it is safe.
2°.	*Law of Contraposi-tion or Modus Tollens*	$((A \Rightarrow B) \& \neg B) \Rightarrow \neg A$	A тўғри бўлганда, B тўғри бўлсин. Аммо B нотўғри. Демак, A ҳам нотўғри.	If the test is positive, then you will require treatment. You did not require treatment. Therefore, the test was negative.
3°.	*Hypothetical syllogism Гипотетик силлогизм*	$((A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow C)) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A \Rightarrow C)$	A дан B ҳамда B дан C келиб чиқсин. У ҳолда A дан C келиб чиқади.	If it rains, we will not have a picnic. If we don't have a picnic, we won't need a picnic basket. Therefore, if it rains, we won't need a picnic basket.
4°.	*Disjunctive Syllogism Дизъюнктив силлогизм*	$((A \vee B) \& (\neg A)) \Rightarrow B$	A ёки B тўғри ва A нотўғри бўлсин. Демак, B нотўғри.	I will learn logic or I will eat my hat. I will not eat my hat. Therefore, I will learn logic.

Предикатлар ва кванторлар.

Айрим дарак гапларда ўзгарувчилар қатнашиб, шу ўзгарувчилар ўрнига конкрет қийматларни қўйсак, мулоҳаза ҳосил бўлади. Бундай дарак гаплар предикатлар дейилади.

Масалан, “Бу ёзувчи Англияда ижод қилган” ва “У Англияда ижод қилган” дарак гапларда ўзгарувчи “Бу ёзувчи” сўз бирикмаси ёки “у” олмошнинг ўрнига “Шекспир” қийматни қўйсак “Шекспир Англияда ижод қилган” рост мулоҳазани, “Гюго” қийматни қўйсак “Гюго Англияда ижод қилган” ёлғон мулоҳазани ҳосил қиламиз.

Худди математикадек, x орқали ўзгарувчини белгиласак юқоридаги дарак гапларни “x ёзувчи Англияда ижод қилган” деб ёзиш мумкин

---

[8] Stephen Cole Kleene (1909-1994) – American Mathematician

Предикатда бир ёки нечта ўзгарувчи қатнашиши мумкин, қатнашган ўзгарувчиларга қараб предикат $P(x), P(x,y), P(x,y,z),....$ каби белгиланади.

Энди $\forall$ ва $\exists$ кванторларга келсак, уларнинг маъносини шундай тушуниш мумкин. $\forall x P(x)$ кўринишдаги янги мулоҳаза x нинг барча (all, every, each, none) қийматлари учун $P(x)$ эканлигини даъво қилади, $\exists x P(x)$ кўринишдаги янги мулоҳаза эса $P(x)$ бўладиган x нинг қиймати мавжудлигини (some, most, at least one, there is) билдиради.

Мисол. Юқорида келтирилган $P(x)$: “x ёзувчи Англияда ижод қилган” предикатни қараймиз.

У ҳолда $\forall x P(x)$ кўринишдаги янги мулоҳаза “барча ёзувчилар Англияда ижод қилган” каби, $\exists x P(x)$ кўринишдаги янги мулоҳаза эса “айрим ёзувчилар Англияда ижод қилган” каби ўқилади. Бунда биринчи мулоҳаза ёлғон, иккинчи мулоҳаза эса рост бўлади. ■

Предикатлар ва кванторлар ёрдамида тавтологияларни ҳосил қилиш мумкин.

Масалан, маърузанинг бошида келтирилган «Агар барча қарғалар қора бўлса, қора бўлмаган қушларнинг ҳеч бири қарға эмас” мулоҳаза

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x(\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$$

контрапозиция қонунини маълум даражада умумлаштириш натижасида ҳосил бўлган янги қонуннинг хусусий ҳоли бўлади.

Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $A(x)$ ўрнига “x - қарға”, $B(x)$ ўрнига эса “x - қора” деган гапларни қўйиб кўриш кифоя.

Инкор амали билан боғлиқ бўлган яна иккита муҳим бўлган мантиқий қонунларни келтирамиз:

$$\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x)), \quad \neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x)).$$

Шу қонунларнинининг маъносини тушуниш учун мисол келтирайлик.

Мисол. Юқорида келтирилган $P(x)$: “x ёзувчи Англияда ижод қилган” предикатни қараймиз.

$\neg(\exists x P(x))$ формула “Англияда ижод қилган ёзувчилар мавжуд эмас” мулоҳазани, $\forall x(\neg P(x))$ формула эса унга тенгкучли мулоҳаза бўлган “Барча ёзувчилар Англияда ижод қилмаган” мулоҳазани билдиради.

Ҳудди шундай, $\neg(\forall x P(x))$ формула “Ҳамма ёзувчилар Англияда ижод қилганлиги нотўғри” мулоҳазани, $\exists x(\neg P(x))$ формула эса унга тенгкучли мулоҳаза бўлган “Англияда ижод қилмаган ёзувчилар бор” мулоҳазани билдиради.

Мисол. Предикатлар ёрдамида қуйидаги мулоҳазани ёзамиз:

“Барча маълум бўлган сўзлар таржимаси луғатда келтирилган. Шундай янги (номаълум) сўзлар борки, уларнинг таржимаси луғатда келтирилмаган.”

Предикатларни киритамиз:

$A(x)$ = « x сўзи маълум»;

$B(x)$ = « x сўзининг таржимаси луғатда келтирилган».

Бу ҳолда қуйидаги кичик мулоҳазалар пайдо бўлади:

$\neg B(x)$ = « x сўзининг таржимаси луғатда келтирилмаган»;

$\forall x A(x)$ = «иҳтиёрий маълум сўз »;

$\exists x(\neg A(x))$ = «номаълум сўзлар мавжуд»;

$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$ = « агар сўз маълум бўлса, у ҳолда унинг таржимаси лўғатда келтирилган»;

$\exists x(\neg A(x) \& \neg B(x))$ = «шундай янги сўзлар борки, уларнинг таржимаси лўғатда келтирилмаган».

У ҳолда берилган мулоҳаза қуйидаги формула ёрдамида ифодаланади:

$(\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))) \& (\exists x(\neg A(x) \& \neg B(x)))$.■

Равшанки, $P(x,y)$ предикатдан кванторлар ёрдамида

$$\forall x P(x,y), \forall y P(x,y), \exists x P(x,y), \exists y P(x,y)$$

кўринишдаги бир ўзгарувчили предикатларни, улардан эса ўз навбатда

$$\forall x\exists yP(x,y),\ \exists y\forall xP(x,y),\ \exists x\forall yP(x,y),\ \forall y\exists xP(x,y),$$
$$\forall x\forall yP(x,y),\ \forall y\forall xP(x,y),\ \exists x\exists yP(x,y),\ \exists y\exists xP(x,y)$$
кўринишдаги мулоҳазаларни қуриш мумкин.
Гарчи $\forall x\forall yP(x,y), \forall y\forall xP(x,y)$ мулоҳазаларнинг ҳамда $\exists x\exists yP(x,y), \exists y\exists xP(x,y)$ маънолари бир ҳил бўлсада $\forall x\exists yP(x,y), \exists y\forall xP(x,y)$ мулоҳазалар тенгкучли эмас экан.

Мисол. $P(x,y) =$ ” y инсон x талабанинг отаси” предикатни қараймиз. Бу ҳолда $\forall x\exists yP(x,y) =$ ”иҳтиёрий талабанинг отаси бор”; $\exists y\forall xP(x,y) =$ ”шундай инсон борки, у барча талабаларнинг отаси бўлади” мулоҳазаларни билдиради. ■

Худди шундай, $\exists x\forall yP(x,y), \forall y\exists xP(x,y)$ мулоҳазалар тенгкучли эмаслигини кўрсатиш мумкин.

Парадокслар ва софизмлар.

Софизм[9] –атайлаб чиқариладиган нотўғри хулоса, бирор тасдиқнинг нотўғри исботи. Бунда исботдаги хато анча усталик билан билинтирмай юборилади.

Софизмга оид масалаларни дастлаб, милоддан аввалги V асрда Қадимги Юнонистонда яшаган математик Зенон тузган.

Зенон, машҳур чопқир Ахиллеснинг олдида судралиб кетаётган тошбақани ҳеч қачон қувиб ета олмаслигини математик мулоҳазалар ёрдамида қуйидагича “исбот” қилган. Ахиллес тошбақага қараганда 10 марта тезроқ чопа олади. Дастлаб, тошбақа 100 метр олдинда бўлсин. Ахиллес бу 100 метрни чопиб ўтгунча, тошбақа 10 метр илгарилайди. Ахиллес бу 10 метрни чопиб ўтгунча тошбақа яна 1метр силжийди ва ҳ.к. Улар орасидаги масофа доим қисқариб боради, лекин ҳеч қачон нолга айланмади.

Зенон масалалари чексизлик, ҳаракат, коинот тушунчалари билан боғлиқ бўлиб, улар математика ва физика фанларининг ривожида катта аҳамиятга эга бўлди.

Айрим софизмлар улуғ аждодларимиз Фаробий асарларида, Беруний билан Ибн Синонинг ёзишмаларида муҳокама қилинган.

Биз қуйида энг содда софизмларга мисоллар келтириб уларни тушунтиришга харакат қилмоқчимиз.

Мисол (1000 сўм қаерга кетди?). Университетнинг 3 нафар талабаси ўз дўстларидан бирини меҳмон қилиш учун кафега таклиф қилишди. Улар овқатланиб бўлишгач официант уларга 25000 сўмлик ҳисобни берди. 3 нафар талаба ҳар бири 10000 сўмдан пул бериб, 30000 сўмни официантга беришди. Официант уларга 5000 сўм қайтим қайтарди. 3 нафар талаба 1000 сўмдан бўлишиб олишди ва 2000 сўмни такси учун беришди. Университетга қайтишаётганда талабалардан бири ҳисоблай бошлади, “Ҳар биримиз 9000 сўмдан харажат қилдик, бу 27000 сўм бўлади, 2000 сўм таксига бердик, буни қўшсак 29000 сўм бўлади. 1000 сўм қаерга кетди ?”

Бу ердаги асосий қилинаётган “хатолик” ҳисоблашнинг нотўғри қилинаётганда. 3 нафар талаба 9000 сўмдан 27000 сўм пул тўлашди. Бундан 25000 сўмини кафега тўлашди, 2000 сўмини такси учун дўстига беришди, демак умумий ҳисоб 27000 сўм бўлади. Юқоридаги ҳисоблашда 2000 сўм 27000 сўмнинг ичида ётибди. ■

Мисол (“2×2=5” софизми).

20-16-4=25-20-5 тўғри тенгликни содаллаштирамиз:

2(10-8-2)=25-20-5

2×2×(5-4-1)=5×(5-4-1)

Оҳирги тенгликнинг ўнг ва чап тарафларини умумий (5-4-1) кўпайтувчига қисқартириб 2×2=5 тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу ердаги асосий қилинаётган “хатолик” нолга тенг бўлган (5-4-1) кўпайтувчига қисқартиришда. ■

Парадокс[10] – кўпчилик томонидан қабул этилган анъанавий фикр, тажрибага ўз мазмуни ёки шакли билан кескин зид бўлган, кутилмаган мулоҳаза. Ҳар қандай парадокс «шубҳасиз тўғри» (асослими, асоссизми, бундан қатьи назар) ҳисобланган у ёки бу фикрни инкор этишдек

[9] Қад. юн. σόφισμα - ҳийла

[10] Қад. юн. παράδοξος - кутилмаган, ғалати

кўринади. «Парадокс» терминининг ўзи ҳам дастлаб антик фалсафада ҳар қандай ғалати, оригинал фикрни ифодалаш учун ишлатилган.

Мантиқий парадокслар, одатда, мантиқий асослари тўла аниқланмаган назарияларда учрайди.

Бир нечта парадоксни келтирамиз.

Мисол (Ёлғончи парадокси). "Мен тасдиқлаётган барча нарса ёлғон" мулоҳазани қараймиз.

Агар бу мулоҳаза рост бўлса, бу мулоҳазанинг маъносига асосан айтилган мулоҳазанинг ёлғон эканлиги ҳақиқат. Агар бу мулоҳаза ёлғон бўлса, мулоҳазадаги таъкид - ёлғон. Демак, бу мулоҳаза ёлғон деган мулоҳаза ёлғон, шундай экан, бу мулоҳаза ҳақиқат.

Зиддият. ■

Мисол (Рефлексивлик парадокси). Ўзбек тилидаги сўзнинг маъноси ўзида ифодаланса, уни рефлексив деб атайлик.

Масалан “ўзбекча” сўзи рефлексив, “инглизча” сўзи эса рефлексив эмас. Ҳудди шундай, “ўнтаҳарфли“ сўзи рефлексив, “олтитаҳарфли“ сўзи эса рефлексив эмас. Барча рефлексив сўзлар тўпламини қарайлик. “Норефлексив” сўзи ўзи рефлексивми?

Агар бу сўз рефлексив бўлса, у ҳолда маъносига кўра, у норефлексив. Агар бу сўз норефлексив бўлса, у ҳолда унинг маъноси ўзида ифодалангани учун, у рефлексив бўлади. Зиддият. ■

4,5-маърузалар. Топология элементлари (4 соат).

Таянч тушунчалар: Тўплам, тўплам элементлари. Асосий сонли тўпламлар. Бўш тўплам. Қисм тўплам, ўзаро тенг бўлган тўпламлар. Эйлер доиралари. Тўпламлар устида амаллар.

Топология фани ҳақида тушунча. Бинар муносабатлар ва уларнинг умумий ҳоссалари. Эквивалентлик, тартиб ва толерантлик муносабатлари.

Тўплам назарияси ҳақида тушунча.

Тўплам математиканинг бошланғич тушунчаларидан бўлиб, уни ўзидан соддароқ тушунчалар орқали таърифлаб бўлмайди.

Турмушда маълум объектлар мажмуини бир бутун нарса деб қарашга тўғри келади. Айтайлик, биолог бирор ўлкадаги ўсимликлар ва ҳайвонлар дунёсини ўрганар экан, у жонзотларни турлар бўйича, турларни эса уруғлар бўйича синфларга ажратиб чиқади. Ҳар бир тур яхлит бир бутун деб қараладиган жонзотлар мажмуидир.

Тўплам ихтиёрий табиатли объектлардан ташкил топган бўлиши мумкин, масалан, Осиё қитъасидаги барча дарёлар ёки луғатдаги барча сўзлар тўплам бўла олади.

Мажмуаларнинг математик тавсифини бериш учун тўплам тушунчасини таниқли немис математиги Г.Кантор[11] қуйидагича киритган: *«Тўплам фикрда бир бутун деб қаралувчи объектлар кўплигидир »*.

Тўпламни ташкил этган объектлар унинг *элементлари* дейилади. Тўплам, одатда, қулайлик учун, лотин алифбосининг бош ҳарфлари, масалан, $A, B, C, \ldots$, унинг элементлари эса кичик ҳарфлари, масалан, $a, b, c, \ldots.$ билан белгиланади. Бирор x элемент A тўпламнинг элементи экани $x \in A$ кўринишда, элементи эмаслиги эса $x \notin A$ кўринишда ёзилади ва биринчи ҳолда «*x элемент A га тегишли*», иккинчи ҳолда «*x элемент A га тегишли эмас*» деб ўқилади.

Элементлари $a, b, c, \ldots.$, бўлган A тўплам $A = \{a, b, c, \ldots.\}$ деб ёзилади[12].

Масалан, $C = \{4, 2, 1, 3\}$, $D = \{\text{blue, white, red}\}$.

Айрим ҳолларда A тўпламнинг ҳар бир x элементи учун $P(x)$ предикат билан ифодаланган *характеристик ҳосса* ўринли бўлади, шунда A тўплам $\{x \mid P(x)\}$ деб ёзилади.

Масалан, $A = \{x \in R \mid x^2 - 1 = 0\}$

Бирорта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам *бўш тўплам* дейилади ва $\varnothing$ каби белгиланади.

[11] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 -1918) , German mathematician

[12] Бунда $\{6, 11\} = \{11, 6\} = \{11, 6, 6, 11\}$

Мисол. Факультетда фамилияси A ҳарфдан бошланган талабалар тўпламини қараймиз. Агар шундай талабалар сони 20 та бўлса, улар 20-элементли тўпламни ташкил этади. Агар шундай талаба ягона бўлса, у ҳолда бизнинг тўпламимиз битта элементдан ташкил топади. Факультетда фамилияси A ҳарфдан бошланган талабалар мавжуд бўлмаса, биз бўш тўпламга эга бўлар эдик.

Агар тўпламни ташкил қилган элементлар чекли сонда бўлса, бундай тўплам *чекли тўплам*, акс ҳолда *чексиз тўплам* дейилади

Қуйидаги чексиз сонли тўпламларга кўп марта мурожаат қилишимизга тўғри келади:

1) $N=\{1;2;...;n;...\}$ -натурал сонлар тўплами;

2) $Z=\{0;\pm1;\pm2;...;\pm n;...\}$ -бутун сонлар тўплами;

3) $Q=\left\{\frac{m}{n} | m\in Z,\ n\in N\right\}$ -рационал сонлар тўплами;

4) J-иррационал (яъни, рационал бўмаган) сонлар тўплами;

5) $R=(-\infty;+\infty)$-ҳақиқий сонлар тўплами;

Агар B тўпламнинг ҳамма элементлари A тўпламга тегишли бўлса, *B тўплам A тўпламнинг қисм тўплами* дейилади ва $B\subset A$ каби ёзилади.

Бунда «*B тўплам A да ётади*» ёки «*B тўплам A нинг қисми*» деб ўқилади.

Бу таърифдан қуйидаги муносабатлар келиб чиқади: $\varnothing\subset A$, $A\subset A$.

$A\subset B$ ва $B\subset A$ бўлса A,B тўпламлар *ўзаро тенг* дейилади ва $A=B$ каби белгиланади.

Масалан, $\{x\in R\,|\,x^2-1=0\}=\{-1,1\}$.

Тўпламлар устида амаллар қуйидагича киритилади:

1) A,B тўпламларнинг *бирлашмаси* деб ҳар бир элементи бу тўпламлардан ақалли биттасининг элементидан иборат бўлган $A\bigcup B$ тўпламга айтилади.

2) A,B тўпламларнинг *кесишмаси* деб, ҳар бир элементи бу тўпламларнинг барчасининг элементидан иборат бўлган $A\bigcap B$ тўпламга айтилади.

3) A ва B *тўпламларнинг айирмаси* деб, A тўпламнинг B га тегишли бўлмаган барча элементларидан иборат $A\setminus B$ тўпламга айтилади.

Тўпламлар назариясида, одатда, тўпламлар орасидаги турли муносабатларни ҳисобга олишга тўғри келади. Масалан, қаралаётган тўпламларнинг барчаси қандайдир бошқа бир тўпламнинг қисм тўплами бўлиши мумкин. Бу ҳолда қаралаётган барча тўпламларни ўзида қисм тўплам сифатида сақловчи **U** тўпламга **универсал тўплам** деб айтилади.

4) $\overline{A}\overset{def}{=}U\setminus A$ тўплам A тўпламнинг *тўлдирувчиси* деб аталади.

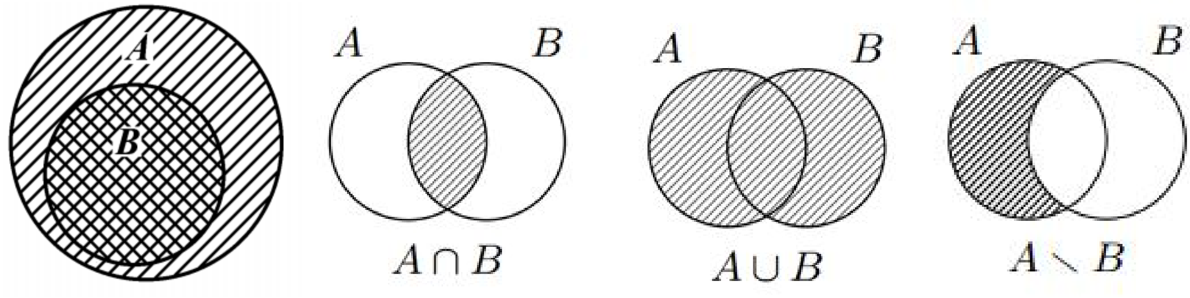
Мисол. $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$ ва $C=\{e,f,k\}$ бўлсин. У ҳолда $E=A\bigcup B=\{a,b,c\}$, $E\bigcup C=\{a,b,c,e,f,k\}$, $C\bigcup B=\{a,b,c,e,f,k\}$, $A\bigcup C=\{a,b,e,f,k\}$ бўлади. ■

Мисол. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{e,f,k\}$ бўлса, у ҳолда $D=A\bigcap B=\{a,b,c\}$, $D\bigcap C=\varnothing$, $A\bigcap C=\varnothing$, $B\bigcap C=\varnothing$, $D\bigcap B=\{a,b,c\}$ бўлади. ■

Мисол. $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{e,f,k\}$ бўлса, у ҳолда $A\setminus B=\varnothing$, $B\setminus A=\{c\}$, $B\setminus C=\varnothing$ бўлади. ■

Мисол. Ўзбекистон Республикасининг ёши 16 дан 25 гача бўлган фуқаролари тўпламини A билан, ёши 21 дан 30 гача бўлган фуқаролари тўпламини эса B билан белгиласак, A ва B тўпламларнинг $A\bigcup B$ бирлашмаси Ўзбекистон Республикасининг ёши 16 дан 30 гача бўлган фуқаролар тўпламини, A ва B тўпламларнинг $A\bigcap B$ кесишмаси Ўзбекистон Республикасининг ёши 21 дан 25 гача бўлган фуқаролар тўпламини, A тўпламдан B тўпламнинг $A\setminus B$ айирмаси Ўзбекистон Республикасидаги ёши 16 дан 21 гача бўлган фуқаролари тўпламини, B тўпламдан A тўпламнинг $B\setminus A$ айирмаси эса Ўзбекистон Республикасининг ёши 25 дан 30 гача бўлган фуқаролари тўпламини англатади. ■

Тўпламлар ва улар орасидаги муносабатларни *Эйлер диаграммалари* ёрдамида график тасвирлаш мақсадга мувофиқ:



$A \subset B$

Қуйидаги хоссалар ўринли:

1°. Коммутативлик: $A \bigcup B = B \bigcup A$; $A \bigcap B = B \bigcap A$

2°. Ассоциативлик: $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$; $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$.

3°. Идемпотентлик[13] қонуни ва константалар ҳоссалари:

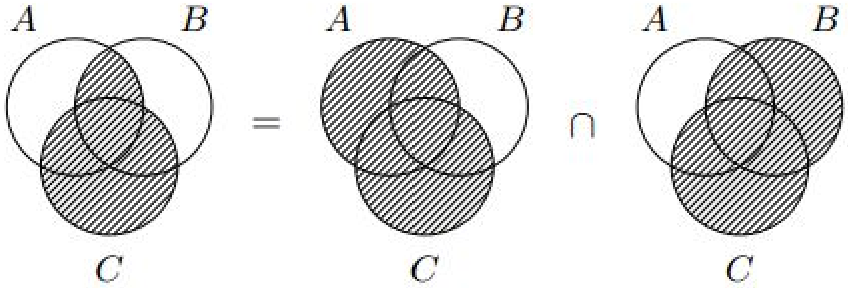
$A \bigcup A = A$; $A \bigcap A = A$; $A \bigcup \varnothing = A$; $A \bigcap \varnothing = \varnothing$; $A \bigcap \mathbf{U} = A$; $A \bigcup \mathbf{U} = \mathbf{U}$;

4°. Дистрибутивлик: $C \bigcup (A \bigcap B) = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$; $C \bigcap (A \bigcup B) = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$

5°. Де Морган қонунлари $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$ va $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$

6°. Инволюция: $\overline{\overline{A}} = A$.

Бу ва бошқа ҳоссаларни Эйлер диаграммалари ёрдамида асослаш мумкин. Масалан, $C \bigcup (A \bigcap B) = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$ дистрибутивлик муносабати Эйлер диаграммалари ёрдамида қуйидагича асосланади:



Топология фани ҳақида тушунча.

Топология – 20 асрнинг иккинчи ярмида вужудга келган математика бўлимларидан бири.

Топология фанининг ғоясини қуйидагича тушунтирса бўлади.

Агар A шакл резинка каби ихтиёрий тарзда узилмасдан, йиртилмасдан эгилиб, чўзилиб ёки қисилиб шаклини ўзгартириш оқибатида B шаклга ўтса (бунда елимланиш, яъни A шаклнинг турли қисмлари B шаклнинг бир қисмини ҳосил қилиниши мумкин эмас), у ҳолда биз A шакл B шаклга *гомеоморф*[14] дейилади.

Масалан Г,Л,М,П,С ҳарфлари ўзаро гомеоморф. О ҳарфи хеч қандай ҳарфга гомеоморф эмас.

Бошқа мисол сифатида ҳар қандай қавариқ кўпбўрчак айланага гомеоморф экан – кўпбурчакнинг учларини “эзиб” силлиқлаш мумкин. Шунингдек, шар, куб, цилиндрнинг сиртлари ўзаро гомеоморф. Кофе ичадиган идиш *торга* (тешиккулчага ўхшаш фигура) гомеоморф:

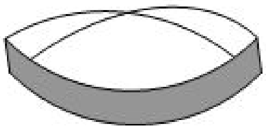
[13] Лот. idem – шундай, potens – кучга эга.

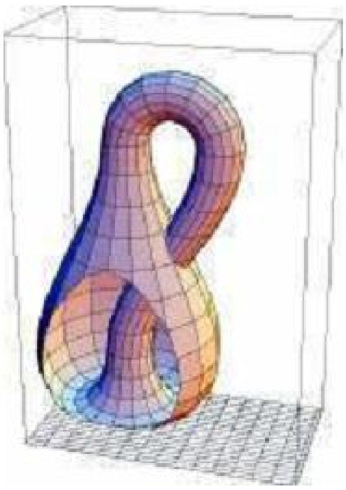
[14] Қад. юн. ὁμός – тенг, ўхшаш, μορφή –шакл

Геометрияда нуқталар орасидаги масофаларни сақловчи ҳаракатлар ва силжитишлар қаралади. Улар натижасида ҳар бир шакл янги ҳолатга қаттиқ жисм тарзида, масофалари ўзгармаган ҳолда кўчади. Ҳаракат ёрдамида бир-бирига ўтадиган шакллар геометрик нуқтаи назардан бир хил объектлар деб қаралади. Топология фанида эса харакатлар ва силжитишларга нисбатан анча умумий акслантиришлар - гомеоморф акслантиришлар билан иш кўрилади. Гомеоморф шакллар топологик нуқтаи назардан бир хил объектлар деб қаралади.

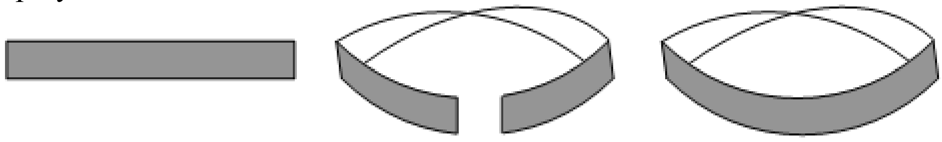
Шунинг учун ҳам топология фанини “Янги замон геометрияси” деб аташган.

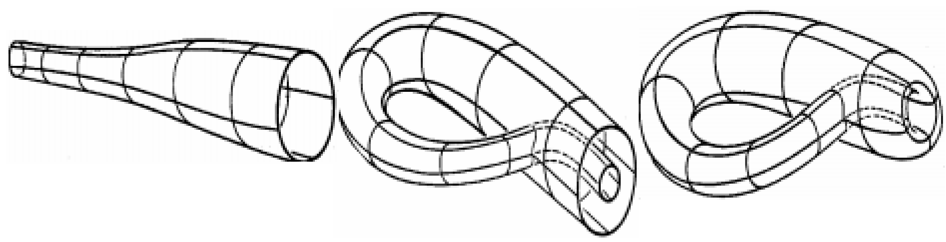
Қуйидаги расмда топология фанидаги машҳур шакллар: Мёбиус лентаси ва Клейн бутилкаси тасвирланган.





Улар қуйидагича “ясалади”.





Бинар муносабатлар ҳақида тушунча.

Объектлар жуфтликлари орасидаги муносабатлар *бинар муносабат* дейилади.

Бинар муносабатларга мисолларни келтирамиз:

тенглик ($=$), тенгсизликлар ($<, \leq$), “дўст бўлиш”, “қандайдир сонга бўлиниш”.

Бинар муносабатга қатъий таъриф берамиз.

A тўплам берилган бўлсин. (a,b), $a,b \in A$, жуфтликлардан иборат бўлган иҳтиёрий R тўплам *бинар муносабат* дейилади. Бунда умуман айтганда $(a,b) \neq (b,a)$ ва $((a,b)=(c,d)) \equiv ((a=c)\,\&\,(b=d))$.

$(a,b) \in R$ ёзув ўрнига aRb ёзувни қабул қиламиз.

R муносабат қуйидаги ҳоссаларга эга бўлиши мумкин:

1°. *Рефлексивлик*: $\forall a \in A\ (aRa)$

Мисоллар: Тенглик, ўхшашлик, умумий бўлувчига эга бўлиш, гомеоморфлик, $\leq$, $\geq$.

2°. *Антирефлексивлик*: $\forall a \in A\ \neg(aRa)$

Мисоллар: $<, >$, ёши катта бўлиш, бўйи катта бўлиш.

3°. *Симметриклик*: $\forall a,b \in A\ (aRb \Rightarrow bRa)$

Мисоллар: Тенглик, ўхшашлик, умумий бўлувчига эга бўлиш, сочининг ранги бир ҳил бўлиш, гомеоморфлик, қариндош бўлиш.

4°. *Антисимметриклик*: $\forall a,b \in A\,(aRb \,\&\, bRa \Rightarrow (a=b))$

Мисоллар: $\le$, $\ge$.

5°. *Транзитивлик*: $\forall a,b,c \in A\,(aRb \,\&\, bRc \Rightarrow aRc)$

Мисоллар: Тенглик, ўхшашлик, умумий бўлувчига эга бўлиш, гомеоморфлик, битта махаллада яшаш, биринчи харфи бир ҳил бўлиш.

Рефлексив, симметрик ва транзитив бўлган муносабат ***эквивалентлик*** муносабати дейилади.

Мисоллар: Тенглик, ўхшашлик, гомеоморфлик, паралеллик, битта махаллада яшаш, сочнинг ранги бир ҳил бўлиш, синфдош бўлиш, биринчи харфи бир ҳил бўлиш.

Эквивалентлик муносабати оддий тенглик муносабатининг умумлашгани бўлади.

Бизга маълумки, табиатда айнан бир ҳил объектлар йўқ, ҳар бир объект индивидуал ҳусусиятларга эга. Бу хусусиятлар эътиборга лойиқ-нолойиқлиги билан фарқланади.

Эквивалентлик муносабати эътиборга лойиқ бўлган хусусиятлар бўйича бир ҳил бўлган объектлар орасидаги муносабатдир. Бунда эквивалентлик муносабат тўпламни ўзаро кесишмайдиган *эквивалентлик синфлар* деб номланган қисм тўпламларга ажратади. Масалан, шаҳар фуқаролари учун “битта мааллада яшаш” муносабатини қарасак, у шаҳар аҳолисини ўзаро кесишмайдиган махаллаларга тақсимланишини таъминлайди. Бунда эквивалентлик синфлари махаллалар бўлади. Юқорида айтганимиздек, биолог бирор ўлкадаги ўсимликлар ва ҳайвонлар дунёсини ўрганар экан, у жонзотларни айрим хусусиятларга кўра турлар бўйича, турларни эса уруғлар бўйича синфларга ажратиб чиқади.

Тилдаги сўзлар учун “биринчи харфи бир ҳил бўлиш” эквивалентлик муносабати луғатни тузишда намоён бўлади. ■

Рефлексив ва симметрик бўлган муносабат ***толерантлик*** муносабати дейилади. Толерантлик муносабати транзитивлик ҳоссасига эга бўлмаслиги мумкин.

Мисоллар: қариндош бўлиш, таниш бўлиш, битта ҳарф билан фарқланиш.

Охирги муносабат ўзбек тилида “борни йўқ қилиш” лингвистик масаласини ечишда намоён бўлади: *bor* $\to$ *yor* $\to$ *yoq* $\to$ *yo’q*.

Рефлексив, антисимметрик ва транзитив бўлган муносабат ***тартиб*** муносабати дейилади.

Мисоллар: $\le$, $\ge$, ёши катта ёки тенг бўлиш, қолдиқсиз бўлиниш.

Яна бир **мисол**. Тилдаги сўзлар учун “ A ва B сўзларнинг бошидаги *m* та харфи бир ҳил бўлиб, A сўзининг *m+1* нчи харфи B сўзининг *m+1* нчи ҳарфидан алифбода кейин тўради” муносабати.

Агар бу муносабатни $\prec$ деб белгиласак, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$A \prec A\,A \prec A\,A\,A \prec A\,A\,B \prec A\,A\,B \prec A\,B \prec B \prec \ldots \prec ZZZ.$

Бу муносабат тилнинг луғатини тузиш учун асос бўлиши равшан. Шунинг учун уни *лексикографик тартиб* муносабати дейишади. ■

6,7- маърузалар. Математик таҳлилнинг асосий тушунчалари ва методлари (4 соат).

Таянч тушунчалар: Функция ва акслантиришлар. Функция турлари. Элементар функциялар. Лимит. Дифференциал ҳисоб назариясининг асосий масалалари ва методлари.
Интеграл ҳисоб назариясининг асосий масалалари ва методлари.
Дифференциал тенглама ва унинг ечимлари ҳақида тушунча. Коши масаласи.

Математик таҳлил (анализ) - математика соҳаларидан бири. Математик таҳлил такомиллашиб ва ривожланиб борувчи аппаратга эга бўлиб, бу аппарат асосини дифференциал ва интеграл ҳисоб ташкил қилади. Математик анализ ўзига хос тадқиқот объектига (ўзгарувчи катталик, функция), ўзига хос тадқиқот услубига (чексиз кичиклар ёки лимитга ўтиш воситасида анализ қилиш), асосий тушунчаларнинг маълум мажмуаси (функция, лимит, ҳосила, дифференциал, интеграл, қатор) га эга. Математик таҳлил 18-аср охирида шаклланди. Математик таҳлилнинг тадқиқот предмети функциялардан ёки ўзгарувчи миқдорлар орасидаги боғланишлардан иборат. Математик таҳлилнинг асосчилари И. Ньютон ва Г. Лейбниц ҳисобланади.

Агар X тўпламнинг ҳар бир x элементига бирор аниқ f қонун-қоидага биноан Y тўпламнинг фақат битта y элементи мос қўйилган бўлса, f *функция* (*акслантириш*), x эса унинг аргументи дейилади ва $y = f(x)$ каби ёзилади. Бу ерда X тўплам $f : X \to Y$ функциянинг *аниқланиш соҳаси*, Y тўплам *ўзгариш соҳаси* дейилади.

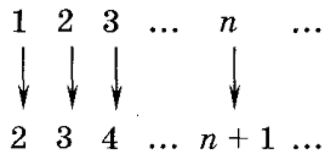
$f : X \to Y$ функция бинар алгебраик муносабат сифатида қаралиши мумкин, бунда $(xRy \,\&\, xRz) \Rightarrow (y = z)$ функционаллик аксиомаси деб номланган шарт бажарилади.

$E(f) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ кўринишдаги тўплам $y = f(x)$ функция *қийматлар соҳаси*[15] дейилади.

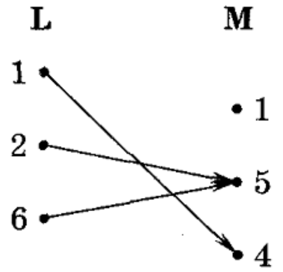
Мисол. Ўзбекистон Республикасида яшайдиган фуқаролар тўпламини X, қишлоқлар тўпламини эса Y. Ҳар бир фуқарога у яшайдиган қишлоқни мос қўяйлик. Бу қоида $f : X \to Y$ функцияни аниқлайди. Айтиш жоизки, айрим фуқароларга (масалан агар улар шаҳарда яшаса) хеч нима мос қўйилмаган.

Мисол. Ўзбекистон Республикасида яшайдиган одамлар тўпламини X дейлик. Ҳар бир одамга унинг неча йил яшаганлигини мос қўяйлик. Бу қоида $f : X \to Z$ функцияни аниқлайди.

Мисол. Ҳар бир натурал сонга унда кейинги натурал сонни мос қўяйлик. Бу қоида $f : N \to N$ функцияни аниқлайди. Бундан ташқари, бу функция $f(n) = n + 1$ формула ёрдамида ёзилиши мумкин, бу ерда n - иҳтиёрий натурал сон. Бу функцияни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

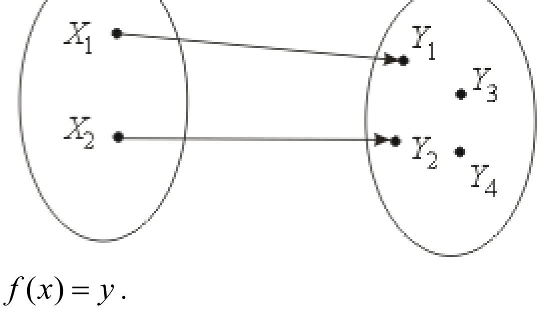


Мисол. $L = \{1, 2, 6\}, M = \{1, 5, 4\}$ тўпламлар учун $1 \in L$ га $4 \in M$, $2 \in L$ га $5 \in M$, $6 \in L$ га $5 \in M$ мос қуядиган қоидани қараймиз. Бу қоида $f : L \to M$ функцияни аниқлаб, уни қуйидагича тасвирлаш мумкин:



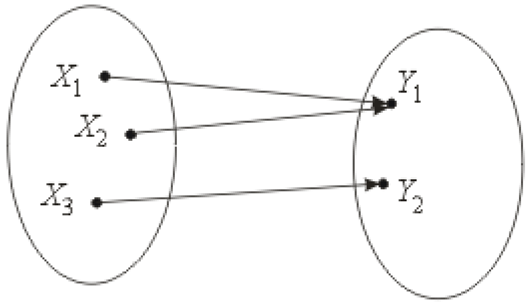
Функция турлари.

1. *Инъекция:* $\forall a, b \in X (f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b)$

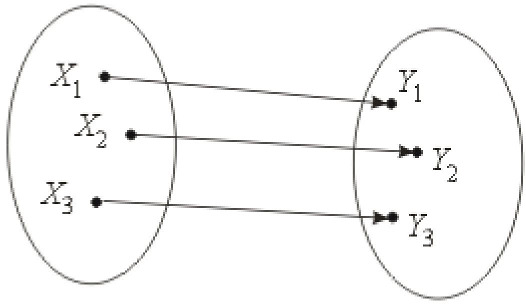


2. *Сюрьекция:* $\forall y \in Y \exists x \in X \ f(x) = y$.

[15] Функция ўзгариш соҳаси тушунчасини қийматлар соҳаси тушунчасидан ажратиш лозим.



3. Бир вақтда ҳам инъекция, ҳам сюрьекция бўлган функция *ўзаро бир қийматли функция* ёки *биекция* дейилади.



X, Y$\subset \mathbb{R}$ ҳолда $f: X \to Y$ функция сонли функция дейилади.

Асосий элементар функциялар.

1. *Даражали функция:* $y = x^a$, *бу ерда* $a \in R$;
2. *Кўрсаткичли функция:* $y = a^x$, *бу ерда* $a > 0,\ a \neq 1$;
3. *Логарифмик функция:* $y = \log_a x$, *бу ерда* $a > 0,\ a \neq 1$;
4. *Тригонометрик функциялар:* $y = \sin x,\ y = \cos x,\quad y = \operatorname{tg} x,\quad y = \operatorname{ctg} x;.$
5. *Тескари тригонометрик функциялар:* $y = \arcsin x,\ \ y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x.$

Асосий элементар функциялардан чекли сондаги арифметик амаллар ва мураккаб функцияни ҳосил қилиш амали натижасида ҳосил бўлган функция *элементар* дейилади. Элементар бўлмаган сонли функцияларга мисол келтирайлик:

Мисол.

1) $y = n!$ функция барча манфий бўлмаган бутун сонлар тўплами *Z₀* да аниқланган. Унинг ўзгариш соҳаси N бўлади.

2) Агар [*x*] билан *x* соннинг бутун қисмини белгиласак, у ҳолда $y = [x]$ функция барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган бўлиб, *у*нинг ўзгариш соҳаси барча бутун сонлар тўпламидан иборат бўлади.

3) Дирихле функцияси.

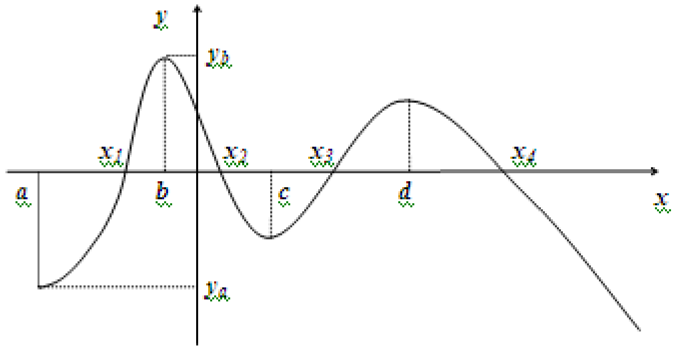
$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q \\ 1, & x \notin Q \end{cases}$$

Агар мослик қоидаси билан биргаликда функциянинг аниқланиш соҳаси ҳам кўрсатилган бўлса, у ҳолда функция *берилган* деб ҳисобланади.

Сонли функцияларнинг *берилиш усулларини* келтирамиз:

1) Жадвал ёрдамида
2) График ёрдамида
3) Аналитик формула ёрдамида
4) Махсус

Мисол. График ёрдамида берилган функция тадқиқ қиламиз.

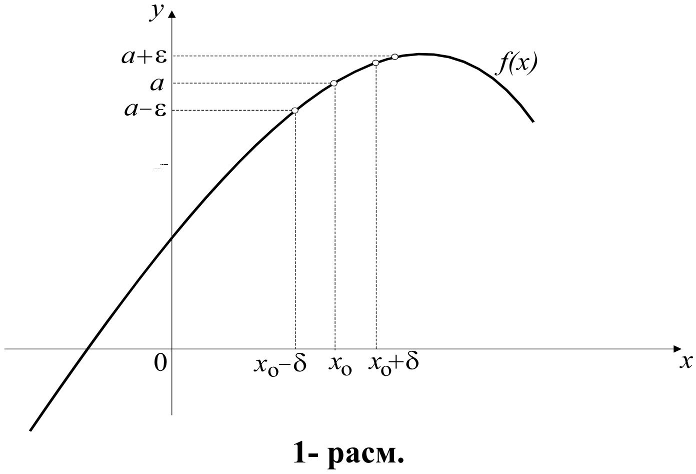


Аниқланиш соҳаси:	$D(f): x \in [a;\infty)$
Қийматлар соҳаси:	$E(f): y \in (-\infty; y_b]$
Функция ноллари:	$f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
Критик нуқталар	b, c, d
Ўсиш оралиқлари:	$x \in [a,b] \cup [c,d]$
Камайиш оралиқлари:	$x \in [b,c] \cup [d,\infty)$
Функция максимуми:	y_b
Функция минимуми:	Аниқлаб бўлмайди
Функция локал минимумлари:	$y_a, y(c)$
Функция локал максимумлари:	$y_b,\ y(d)$

Таъриф (*Коши*). *А*гар ҳар бир $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилиб, $x \in X$ нинг $0 < |x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - a| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, a сон $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ***лимити*** деб аталади.
Символик тилда бу таъриф қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Маъноси: x_0 нуқтага яқин бўлган ҳар қандай аргумент учун функция қиймати a сонига яқин бўлади (расмга қаранг)



1- расм.

$f : X \to Y$ функция учун $\forall x_0 \in I \subset X \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ бўлса, бу функция I тўпламда *узлуксиз* дейилади. I тўпламда узлуксиз функциянинг графигини қаламни коғоздан узмасдан чизса бўлади. Барча элементар функциялар ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиз бўлади.

Қуйидаги лимитлар *ажойиб* деб номланади:

I-ажойиб лимит: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

II -ажойиб лимит: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e=2,71828...$

Дифференциал ҳисоб – математиканинг ҳосилалар ва дифференциалларни ҳисоблаш, уларнинг хоссаларини ўрганиш ҳамда функцияларни текширишга татбиқ қилиш билан шуғулланадиган бўлими.

Дифференциал ҳисобнинг вужудга келишидаги дастлабки ишлар эгри чизиққа уринма ўтказиш масаласини ечишда Ферма, Декарт ва бошқа математиклар томонидан қилинган. И. Ньютон ва Г. Лейбниц ўзларидан аввалги математикларнинг бу борадаги ишларини ниҳоясига етказдилар.

Таъриф. $y=f(x)$ функциянинг x нуқтадаги *ҳосиласи* деб, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ лимитга айтилади.

$y=f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи y', $f'(x),\frac{dy}{dx},\frac{df(x)}{dx}$ лардан бири билан белгиланади.

Функция ҳосиласини топиш амали *дифференциаллаш* дейилади ва у дифференциал ҳисобнинг асосий масаласи ҳисобланади.

Дифференциал ҳисоб функциянинг ўзгаришини тадқиқ қилиш учун асосий восита ҳисобланади. Дифференциал ҳисоб методлари ёрдамида функциянинг ўсиши ва камайиши, қавариқлиги ва ботиқлиги, унинг максимум ва минимуми ва ҳ.к. текшириш мумкинлиги бизга маълум.

Дифференциал ҳисоб маҳсус тил сифатида қаралса, унда ўзига хос **грамматика** (дифференциаллаш қоидалари) ва **луғат** (ҳосилалар жадвали) мавжуд.

Луғат ва грамматика функция ҳосиласини лимит тушунчасига таянган умумий таърифдан фойдаланмасдан топишга қулайлик туғдиради.

Бундай ҳолат тилшуносликда учрайди: керакли сўз келиб чиқишини таҳлил қилмасдан биз уни ва унинг ўзгариш қоидаларини луғатдан аниқлаймиз.

Луғат (ҳосилалар жадвали)

№	Функция	Ҳосила
1	x^n	nx^{n-1}
2	$\sin x$	$\cos x$
3	$\cos x$	$-\sin x$
4	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
5	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

№	Функция	Ҳосила
6	e^x	e^x
7	a^x	$a^x\ln a$
8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$

Грамматика (дифференциаллаш қоидалари)

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x);$$

$$\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$

$$\left(Cf(x)\right)'=Cf'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Агар $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ бўлса мураккаб $y=f(u)$ функциянинг ҳосиласи $y'=f'_u(u)u'$ формула ёрдамида топилади.

17-асрга келиб, техника ва табиий фанларнинг тараққиёти математика олдига жуда кўп янги масалаларни, жумладан, мураккаб геометрик шаклдаги жисмларнинг юзини, ҳажмини, оғирлик марказини ҳисоблаш масалаларини қўйди. Буларни аниқлашнинг қадимги эски усуллари ўрнига янги ва кучли математик усуллар яратиш зарурияти туғилди. Бундай масалалар интеграл ҳисобнинг пайдо бўлишига олиб келди.

Интеграл ҳисоб – интеграллар ва уларнинг хоссаларини, ҳисоблаш усулларини, татбиқларини ўрганувчи математика бўлими.

Функция интегралини топиш амали *интеграллаш амали* дейилади.

Интеграллаш амали дифференциаллаш амалига тескари амал бўлиб, у қуйидагича киритилади.

$F'(x)=f(x)$ муносабатни қаноатлантирадиган $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг *бошланғич функцияси* дейилади.

$F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлсин. $F(x)+C$ кўринишдаги функциялар оиласи $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли дейилади ва $\int f(x)dx$ каби белгиланади: $\int f(x)dx \overset{def}{=} F(x)+C$.

Интеграл ҳисоб маҳсус тил сифатида қаралса, унда ҳам ўзига хос **грамматика** (интеграллаш қоидалари) ва **луғат** (интеграллар жадвали) мавжуд.

Луғат (интеграллар жадвали)

№	$f(x)$	$F(x)$
1	k	$kx+C$
2	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln x+C$
4	$\sin x$	$-\cos x+C$
5	$\cos x$	$\sin x+C$

№	$f(x)$	$F(x)$
6	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx+C$
7	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx+C$
8	e^x	e^x+C
9	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$

Грамматика (интеграллаш қоидалари)

1. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$

2. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

4. $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx$ - ўзгарувчини алмаштириш усули.

Эслатма. Айрим функцияларнинг, масалан $e^{-x^2}, \sin x^2, \frac{\sin x}{x}, \frac{1}{\ln x}$ функцияларнинг аниқмас интегралларини элементар функциялар ёрдамида аниқлаб бўлмайди.

Интеграл ҳисоб тараққиёти ва мазмуни дифференциал ҳисоб тараққиёти ва мазмуни билан узвий боғлиқ. Интеграл ҳисобнинг яна битта асосий тушунчаси аниқ интеграл тушунчасидир.

Таъриф. $F(x)$ функция $f(x)$ узлуксиз функциянинг бошланғич функцияси бўлсин. $F(b)-F(a)$ айирма $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесма бўйича аниқ интеграли дейилади ва $\int_a^b f(x)dx$ каби белгиланади:

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Юқоридаги формула *Ньютон-Лейбниц формуласи* дейилади.

Аниқ интеграллар ёрдамида эгри чизиқлар билан чегараланган фигуралар юзалари, эгри чизиқлар ёйларининг узунликлари, жисмлар ҳажмлари, оғирлик марказининг координаталари, инерция моментлари, кучнинг иш ҳажми, моддий нуқта йўлини аниқлаш каби кўплаб табиий-илмий масалалар ҳал қилинади.

Эркли ўзгарувчи, шу ўзгарувчининг функцияси ва унинг ҳосиласини боғловчи

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

тенглама *дифференциал тенглама* дейилади.

Дифференциал тенгламани айниятга айлантирадиган ҳар қандай $y(t)$ унинг *ечими* дейилади.

Дифференциал тенгламанинг *бошланғич шарт* деб номланадиган $y\big|_{t=0} = y_0$ кўринишдаги шартни қаноатлантирадиган *ечимини* топиш масаласи *Коши*[16] *масаласи* ёки *бошланғич масала* дейилади.

<u>Мисол.</u> Табиий тил луғатининг вақт кечиши билан ўзгариши масаласини кўрамиз. Бу масала тилшуносликда *глоттохронология*[17] масаласи деб номланади.

Вақтнинг айнан бир t онида луғатнинг ҳажми $L(t)$ бўлса, у ҳолда унинг вақт кечиши билан ўзгаришнинг оний тезлиги $\frac{d}{dt}L(t)$ ҳосилага тенг бўлиб, бу ҳосила $L(t)$ га қандайдир k коэффициент билан пропорционал эканлигини фараз қиламиз. Натижада қуйидаги дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{dL}{dt} = kL .$$

Бу дифференциал тенгламанинг ечимини топайлик.

$$\frac{dL}{L} = kdt$$

Интеграллаймиз: $\int \frac{dL}{L} = k\int dt$, $\ln L = kt + C_0$, $L = e^{C_0+kt} = Ce^{kt}$.

$$L(t) = Ce^{kt} \text{ - умумий ечим.}$$

Энди тенгламанинг $L(0) = L_0$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган хусусий ечимини топайлик.

Юқоридаги формулага $t=0$ ни қўйиб $C = L_0$ эканлигини топамиз. Демак, табиий тил луғатининг вақт кечиши билан ўзгариши қонунига $L = L_0e^{kt}$ якуний ифода бериш мумкин.

---

[16] Koshi Lui Ogyusten (1789-1857)- Mathematician from France .

[17] қад. юн. γλῶττα - тил, χρόνος - вақт ва λόγος - фан

8-маъруза. Асосий алгебраик структуралар (2 соат).
Таянч тушунчалар: Алгебраик амаллар ва уларнинг асосий ҳоссалари. Алгебраик структураларнинг асосий синфлари: яримгруппа, группа, халқа, майдон.

A - бўш бўлмаган тўплам берилган бўлсин.
Таъриф. A тўпламдаги ҳар бир a элементга шу тўпламдаги акалли битта b элементни мос қўйган акслантириш A тўпламда берилган *унар алгебраик амал* дейилади.
Таъриф. A тўпламдаги ихтиёрий иккита a,b элементига шу тўпламдаги акалли битта c элементни мос қўйган акслантириш A тўпламда берилган *бинар алгебраик амал* дейилади[18].

Бинар алгебраик амал ҳолида бинар амал қиймати учун $a*b$ ёзувни қабул қиламиз, бу ерда $*$ - бинар алгебраик амалнинг белгиси.

Эслатма. $a*b$ ёзувда иштирок этган a,b элементлар тартиби муҳимдир.

Мисоллар.
Арифметик амаллар: тегишли жоиз a,b ҳақиқий сонларни қўшиш ($a+b$), айириш ($a-b$), кўпайтириш (ab) ва бўлиш (a/b) – бинар амаллар, берилган даражага кўтариш (масалан, a^2), илдиз чиқариш (масалан, $\sqrt{a}$) ва логарифмлаш (масалан, $\log_2 a$) – унар амаллар.
Математик анализ амаллари: тегишли жоиз функциялар тўпламида функцияларни қўшиш, кўпайтириш ва бўлиш, мураккаб функцияни ҳосил қилиш ($(f\circ g)(x) \overset{def}{=} f(g(x))$ -функциялар композицияси) – бинар амал, дифференциаллаш ($f'(x)$) ва интеграллаш ($\int f(x)dx$) – унар амаллар.
Мантиқий амаллар: A мулоҳазанинг $\neg A$ инкори – унар амал, A,B мулоҳазаларнинг $A\,\&\,B$ конъюнкцияси, $A\vee B$ дизъюнкцияси, ва $A\Rightarrow B$ импликацияси - бинар амаллар.
Тўпламлар назарияси амаллари: A тўпламнинг $\overline{A}$ тўлдирувчиси - унар амал, A,B тўпламларнинг $A\bigcup B$ бирлашмаси, $A\bigcap B$ кесишмаси ва $A\setminus B$ айирмаси - бинар амаллар.
Математикада муҳим бўлган бир амални қараймиз.
Мисол. $\{a,b\}$ тўпламда $\oplus$ алгебраик амал қуйидаги жадвал ёрдамида киритилсин:

a	b	$a\oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Табиий тилда бу амал қуйидагича ифодаланади:
1. «натижа тўғри (1), **агар** A B га тенг бўлмаса ($A\neq B$)»;
2. «**агар** A B га тенг бўлмаса ($A\neq B$), **у ҳолда** натижа тўғри (1)».

Бу амални кўпинча табиий тилдаги «ё … ё …» структура билан боғлашишади. Бунда «ё A, ё B» мураккаб мулоҳаза рост бўлади, қачонки ё A, ё B тўғри бўлиб, аммо бунда иккаласи ҳам тўғри бўлмайди; акс ҳолда мураккаб мулоҳаза нотўғри.

Масалан,
A: “Алишер Тошкентда туғилган”; B: “Алишер Қаршида туғилган” мулоҳазаларни қарасак $A\oplus B$ мураккаб мулоҳаза “Алишер ё Тошкентда ё Қаршида туғилган” кўринишга эга бўлади.

Кўриниб турибдики, табиий тилда «ё … ё …» структура бир қийматли аниқланмас экан. Ростлик жадвали ёрдамида $A\oplus B \Leftrightarrow (A\,\&\,\neg B)\vee(B\,\&\,\neg A)$ формула ўринли эканлигини исботлаш мумкин.

[18] Алгебраик амал тушунчасини 2 дан кўп элемент учун ҳам киритса бўлади.

Тўпламлар назариясида бу амалга $A \oplus B \overset{def}{=} A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ **симметрик айирма** амали мос келади.

Яримгруппа ва группа.

G тўпламда $(a, b) \to a * b$ бинар алгебраик амал аниқланган бўлсин. Агар қуйидаги ҳоссалар (аксиомалар) ўринли бўлса, G тўплам $*$ амалига нисбатан **группа** дейилади:

I. **Ассоциативлик**. $(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in G$.

II. **Нейтрал элемент мавжудлиги**. $\exists e \in G \quad : \quad e * x = x * e = x \quad \forall x \in G$

III. **Симметрик (тескари) элемент мавжудлиги**.

$\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G \quad : \quad x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Агар фақат I –аксиома бажарилса, G тўплам $*$ амалига нисбатан **яримгруппа** дейилади.

Натурал, бутун, рационал, ҳақиқий сонлар тўпламлари ҳар бири қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан яримгруппага энг содда мисол сифатида қаралиши мумкин.

Қўшиш амалига нисбатан бутун сонлар тўплами, кўпайтириш амалига нисбатан рационал сонлар тўплами ҳар бири группага энг содда мисол сифатида қаралиши мумкин.

Мисол. Белгилардан ташкил топган ҳар қандай чекли A тўплам *алфавит* дейилади. Алфавитга мисол сифатида инглиз тилининг алфавитини, $\{0,1\}$ тўпламни келтириш мумкин. A алфавит устидаги *сўз* деб иҳтиёрий $a_1a_2a_3...a_n$ кетма-кетликка айтилади, бу ерда $a_i \in A$. Масалан, 1,100,101,11011, 0001 - $A = \{0,1\}$ алфавит устидаги сўзлар. Хеч қандай белгилардан ташкил топган ε сўзни *бўш сўз* деб атаймиз. A^* орқали A алфавит устидаги барча сўзлар тўпламини, яъни тилни белгилаймиз.

Иҳтиёрий $a_1a_2a_3...a_n$ ва $b_1b_2b_3...b_m$ сўзлар учун қуйидаги қоидага асосан *конкатенация* деб номланадиган бинар амални киритамиз:

$$(a_1a_2a_3...a_n) \circ (b_1b_2b_3...b_m) \overset{def}{=} a_1a_2a_3...a_nb_1b_2b_3...b_m.$$

Масалан, $fa \circ ther = father$.

Равшанки, бу амал ассоциатив бўлиб, ε унга нисбатан нейтрал бўлади.

Демак, A^* нейтрал элементга эга бўлган яримгруппа бўлади.

Мисол. Алфавит сифатида $A = \{\varepsilon, a, b, c, d\}$ тўпламни олайлик. Тўртта a,b,c,d ҳарфдан иборат бўлган, аммо бунда a,b ёнма-ён ҳамда c,d ёнма-ён турмайдиган сўзлардан ташкил топган F тўпламни қараймиз. F тўпламда худди олдинги мисолдек конкатенация амалини қиритамиз, аммо бунда агар a,b ёки c,d ёнма-ён пайдо бўлса, уларни ўчириб ташлаймиз. Бу амалга нисбатан F тўплам группани ташкил қилади. Бу группа иккита $\{a,c\}$ ҳарфлар ёрдамида ташкил топган *озод группа* дейилади[19].

Яна битта аксиомани келтирамиз.

IV. **Коммутативлик**. Иҳтиёрий a, b учун $a * b = b * a$.

G **группада** бу аксиома бажарилса, унга *коммутатив группа* дейилади.

Қўшиш амалига нисбатан бутун сонлар тўплами, кўпайтириш амалига нисбатан рационал сонлар тўплами ҳар бири коммутатив группани ташкил қилишини кўрсатиш қийин эмас.

Юқорида келтирилган озод группа коммутатив эмаслиги равшан.

Халқа ва майдон.

R тўпламда иккита $\oplus$, $\otimes$ алгебраик амал аниқланган бўлсин. Агар R тўплам $\oplus$ амалига нисбатан коммутатив группани, $\otimes$ амалига нисбатан яримгруппани ташкил этиб, ҳамда бу иккита амал *дистрибутив боғланиш* деб номланган

$$\forall a,b,c \in R \begin{cases} a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \\ (b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a) \end{cases}$$

муносабатларни қаноатлантирса, R тўплам **халқа** дейилади:

Бутун сонлар тўплами халқага энг содда мисол сифатида қаралиши мумкин.

[19] Озод группани бир нечта ҳарфлар ёрдамида ҳам ташкил қилса бўлади.

Мисол. Тўпламлар $\oplus$, $\otimes$ алгебраик амаллар қуйидагича киритилсин:

$$A \oplus B \stackrel{def}{=} A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$$

$$A \otimes B \stackrel{def}{=} A \bigcap B \text{.}$$

Бу амалларга нисбатан U универсал тўплам халқани ташкил этар экан.

F тўпламда иккита $\oplus$, $\otimes$ алгебраик амал аниқланган бўлсин. Агар F тўплам $\oplus$ амалига нисбатан 0 деб белгиланадиган нейтрал элементли коммутатив группани, $F \setminus \{0\}$ тўплам эса $\otimes$ амалига нисбатан группани ташкил этиб, бу иккита амал *дистрибутив боғланса*, F тўплам **майдон** дейилади.

Рационал сонлар тўплами майдонга энг содда мисол сифатида қаралиши мумкин.

Мисол. $Z_2 = \{0,1\}$ тўпламда $\oplus$, $\otimes$ алгебраик амаллар қуйидагича киритилсин:

$$0 \oplus 0 = 0; 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1; 1 \oplus 1 = 0$$

$$0 \otimes 0 = 0; 0 \otimes 1 = 1 \otimes 0 = 0; 1 \otimes 1 = 1$$

Бу ҳолда Z_2 тўплам майдонни ташкил этар экан.

9-маъруза. Вектор фазо ва чизиқли акслантириш (2 соат).

Таянч тушунчалар: Вектор фазо таърифи. Вектор фазо базиси ва ўлчови. Векторлар устида амаллар. Чизиқли акслантиришлар ва матрицалар. Скаляр кўпайтма ва норма. Учбурчак ва Коши-Буняковский-Шварц тенгсизликлари. Кўп ўлчовли евклид фазолари.

V тўплам **вектор фазо** дейилади, агар унда қўшиш деб номланган бинар алгебраик амал ҳамда бирор F майдон элементига кўпайтириш унар алгебраик амал аниқланган бўлиб, қуйидаги ҳоссалар (вектор фазо аксиомалари) ўринли бўлса:

1) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in V$ *,*

2) $\left(a + b\right) + c = a + \left(b + c\right) \quad \forall a, b, c \in V$ *,*

3) $\exists 0 \in V \quad : \quad a + 0 = a \quad \forall a \in V$ *,*

4) $\forall a \in V \quad \exists - a \in V \quad : \quad a + \left(-a\right) = 0$ *,*

5) $\lambda\left(a + b\right) = \lambda a + \lambda b \quad \forall \lambda \in K \quad \forall a, b \in V$ *,*

6) $\left(\lambda + \mu\right) a = \lambda a + \mu a \quad \forall \lambda, \mu \in K \quad \forall a \in V$ *,*

7) $\left(\lambda \mu\right) a = \lambda\left(\mu a\right) \quad \forall \lambda, \mu \in K \quad \forall a \in V$ *,*

8) $1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$ *.*

Кўриниб турибдики, V вектор фазо қўшиш амалига нисбатан коммутатив группани ташкил қилади.

Вектор фазога **мисоллар.**

1) Битта элементдан иборат $V = \left\{0\right\}$ тўплам,

2) тўғри чизиқда, текисликда, фазодаги векторлар тўпламлари,

3) n-ликлардан ташкил топган $R^n = \left\{\left(a_1, \ldots, a_n\right) \quad : \quad a_i \in R\right\}$ тўплами, бунда қўшиш ва сонга кўпайтириш компоненталар бўйича қуйидагича аниқланган:

$$\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + \left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n\right);$$

$$\lambda \cdot \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \left(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n\right).$$

4) сонли функциялар тўплами.

V тўплам элементлари одатда *векторлар,* K майдон элементлари эса *сонлар* деб номланади. K майдон сифатида R ҳақиқий сонлар тўпламини оламиз.

Таъриф. $e_1, \ldots e_n$ векторлар системаси **чизиқли эркли** дейилади, агар $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$ тенглик фақат $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ бўлгандагина бажарилса.

Таъриф. Чизиқли эркли бўлган $e_1, \ldots e_n$ векторлар системаси **базис** дейилади, агар

$n+1$ та вектордан иборат бўлган ҳар қандай система чизиқли эркли бўлмаса. Бунда n натурал сон вектор фазо **ўлчови** дейилади.

Мисоллар

Текисликдаги векторлар икки ўлчовли вектор фазони ташкил этади. Бунда декарт координаталар системасини киритсак, $i=(1,0), j=(0,1)$ векторлар базисни ташкил этади.

$R^n=\{(a_1,\dots,a_n) \quad : \quad a_i\in R\}$ вектор фазода **ортлар** деб номланган

$$e_1=(1,0,0,\dots,0),...,e_2=(0,1,0,\dots,0),e_3=(0,0,1,\dots,0),e_n=(0,0,0,\dots,1)$$

векторлар базисни ташкил этади. Бунда $(a_1,\dots,a_n)\in R^n$ вектор **арифметик вектор** дейилади.

Айрим вектор фазолар учун ўлчов мавжуд эмас, бу ҳолда вектор фазо **чексиз ўлчовли** дейилади.

Мисол. Сонли функциялар тўплами чексиз ўлчовли бўлади, чунки иҳтиёрий n учун $1,x,x^2,...,x^n$ векторлар чизиқли эркли.

ТЕОРЕМА. Агар $e_1,\dots e_n$ - V вектор фазонинг базиси бўлса, иҳтиёрий $\forall x\in V$ учун $x=e_1a_1+\dots+e_na_n$ тенгликни қаноатлантирадиган ягона $(a_1,\dots,a_n)\in R^n$ арифметик вектор мавжуд.

Исбот. Мавжудлиги. Базис таърифига кўра, $n+1$ та вектордан иборат $e_1,\dots e_n,x$ система чизиқли эркли эмас, яъни

$\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n+\lambda x=0$ тенглик $\lambda\neq 0$ учун бажарилади (акс ҳолда $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$).

Демак, $x=e_1x_1+\dots e_nx_n$, бу ерда $x_1=\dfrac{\lambda_1}{\lambda},...,x_n=\dfrac{\lambda_n}{\lambda}$.

Ягоналиги. $x=e_1x_1+\dots e_nx_n=e_1z_1+\dots e_nz_n$ бўлсин, бу ҳолда $e_1(x_1-z_1)+\dots+e_n(x_n-z_n)=0$. $e_1,\dots e_n$ векторлар чизиқли эркли бўлгани учун $x_1-z_1=\dots=x_n-z_n=0$ бўлади.

Теорема исботланди.

Таъриф. V , W вектор фазолар берилган бўлсин. $f:V\to W$ акслантириш **чизиқли акслантириш** дейилади, агар қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

1. $\forall x,y\in V\ f(x+y)=f(x)+f(y)$
2. $\forall x\in V\,\forall\alpha\in R\ f(\alpha x)=\alpha f(x)$.

Юқоридаги теорема иҳтиёрий n - ўлчовли вектор фазо ҳамда R^n фазо орасидаги бир қийматли мослик ўрнатиш мумкинлигини тасдиқлайди. Равшанки, бу акслантириш чизиқли бўлиб, у алгебраик амаллар ҳоссалари сақлайди. Шунинг учун n - ўлчовли вектор фазолар ўрнига R^n фазоси ўрганилиши кифоя. Адабиётларда бундай акслантиришлар **изоморфизм**[20] деб номланган.

Таъриф. m та қатор ва n та устунли

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишдаги жадвал $m\times n$ *- ўлчамли матрица* дейилади.

Чекли ўлчовли V вектор фазо учун ҳар қандай $f:V\to V$ чизиқли акслантириш (оператор) матрица ёрдамида ягона усулда ифодаланиши исботланган.

Матрицалар турли соҳаларда, жумладан иқтисодиётда, социологияда, техника фанларида кенг қўлланилади.

[20] (қад. юн. ἴσος — «тенг, бир ҳил, ўхшаш» и μορφή — «шакл»)

Таъриф. V вектор фазонинг ҳар қандай x,y векторлари учун қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган (x,y) ҳақиқий сон *скаляр кўпайтма* дейилади:

- симметриклик: $(x,y) = (y,x)$;
- ассоциативлик: $(x_1 + x_2,y) = (x_1,y) + (x_2,y)$; $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$;
- номанфийлик: $(x,x) \geq 0$, бунда $(x,x) = 0$ тенглик $x = 0$ бўлгандагина бажарилади.

Теорема. (Коши-Буняковский-Шварц тенгсизлиги). $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$.

Исбот. Иҳтиёрий λ учун номанфийликдан $(x + \lambda y,x + \lambda y) \geq 0$ тенгсизлик ўринли. Соддалаштирамиз: $\lambda^2(y,y) + 2\lambda(x,y) + (x,x) \geq 0$. Бу тенгсизликнинг чап тарафи λ га нисбатан квадрат учхад бўлади. Бу тенгсизлик барча λ учун бажарилганлиги боис, унинг дискриминанти номусбат, яъни $(x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$. Теорема исботланди.

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ сони x *векторнинг нормаси* дейилади.

Теорема. (Учбурчак тенгсизлиги). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Исбот.

$$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq$$
$$\leq (x,x) + 2|(x,y)| + (y,y).$$

Коши-Буняковский-Шварц тенгсизлигига кўра,

$$\|x+y\|^2 \leq (x,x) + 2(x,x)(y,y) + (y,y) = \left(\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}\right)^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2.$$

Демак, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Равшанки, x векторнинг нормаси қуйидаги шартларни қаноатлантиради:
$\|x\| \geq 0$, бунда $\|x\| = 0$ тенглик фақат $x = 0$ учун бажарилади,
$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Норма ва скаляр кўпайтма ёрдамида V вектор фазода икки вектор орасидаги бурчак қуйидагича аниқланади:

$$\cos\alpha = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}.$$

Жумладан, икки вектор учун $(x,y) = 0$ тенглик бажарилса, улар ортогонал дейилади.

Мисол. n-ликлардан ташкил топган $R^n = \{(a_1,\ldots,a_n) \ : \ a_i \in R\}$ вектор фазода скаляр кўпайтма, норма ва икки вектор орасидаги бурчак қуйидагича аниқланади:

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ бўлса

$$(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n, \ \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2};$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}.$$

Шуни айтиш жойизки,

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0),...,e_2 = (0,1,0,\ldots,0), e_3 = (0,0,1,\ldots,0), e_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

ортлар ўзаро ортгонал бўлади.

Юқорида қурилган иҳтиёрий n - ўлчовли вектор фазо ҳамда R^n фазо орасидаги изоморфизм иҳтиёрий n - ўлчовли вектор фазода ҳам худди Евклид геометрияси (планиметрия ва стереометрия) га ўхшаш геометрияни қуришга имкон беради. Шунинг учун ҳам скаляр кўпайтмали чекли ўлчовли вектор фазоси евклид фазоси дейилади.

10,11- маърузалар. Дискрет математика асослари (4 соат).

Таянч тушунчалар: Комбинаториканинг асосий қоидалари ва формулалари: қўшиш (жамлаш) ва кўпайтириш қоидалари, ўрин алмаштиришлар, ўринлаштиришлар, бирикмалар.
Графлар назарияси асослари: графлар турлари; учлар, қирралар, ёйлар; дарахтлар.

Комбинаторика.

Объектларни танлаш ва уларни маълум тартибда жойлаштириш каби математик масалалар ҳар доим инсонни қизиқтирирадиган соҳалардан ҳисобланган.

Комбинаторика – бу дискрет математиканинг чекли тўплам элементларини берилган қоидалар асосида танлаш ва жойлаштириш билан боғлиқ масалаларни ечиш усулларини ўрганувчи бўлимдир.

Комбинаторика тарихига назар ташласак, бир неча минг йил аввал Хитойда сеҳрли квадратлар тузиш, қадимги Юнонистонда фигурали сонлар назариясини тузиш масаласини ўрганишган. Комбинаторика масалалари Самарқанддаги Улуғбек мактабининг таниқли математиги Ғиёсиддин Жамшид Коший, X асрда яшаб ижод этган Умар Хайём, кейинчалик Европа олимлари жумладан, Б. Паскаль, Ж. Кордано, Г. Лейбниц , Я. Бернулли, П. Ферма, Л. Эйлер ва бошқа олимларнинг ишларида учрайди.

$|A|$ деб чекли A тўплам элементлари сонини белгилаймиз.

Комбинаторикада содда, ўз-ўзидан равшан бўлган, аммо муҳим қоидалар бор. Бундай қоидалар сифатида жамлаш, кўпайтириш ҳамда киритиш ва чиқариш қоидалари деб аталувчи қоидаларни кўрсатиш мумкин.

Жамлаш (қўшиш) қоидаси: Агар A тўплам n та элементдан, B тўплам эса m та элементдан иборат бўлиб, бу икки тўплам ўзаро кесишмаса, у ҳолда A ва B нинг барча элементларидан иборат $A \cup B$ тўплам $n + m$ та элементга эга, яъни

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Жамлаш қоидаси билан A ва B тўпламлар ўзаро кесишганда ҳам $A \cup B$ тўплам элементлари нечталигини ҳисоблаш мумкин. Бунда қуйидаги ***киритиш-чиқариш қоидаси*** ўринли:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Равшанки, бу тенгликдан фойдаланиб $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$ ва $|A \cap B|$ миқдорларнинг ихтиёрий учтаси маълум бўлганда тўртинчисини ҳисоблаш мумкин.

Масала. 50 та талабадан 40 таси инглиз тилини, 25 таси эса немис тилини ўрганмоқдалар. Иккала тилни ҳам ўрганаётган талаба нечта?
Ечилиши. Инглиз тилини ўрганаётган талабалар тўпламини A орқали, немис тилини ўрганаётган талабалар тўпламини B орқали белгилаймиз. Маълумки, $|A \cup B| = 50$, $|A| = 40$, $|B| = 25$. У ҳолда иккала тилни ҳам ўрганаётган талабалар $A \cap B$ тўпламни ташкил қилиб, киритиш-чиқариш формуласидан $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 15$.

Кўпайтириш қоидаси: $< a,b >$ ($a \in A$, $b \in B$) кўринишдаги жуфтликлардан иборат C тўплам nm та элементга эга, яъни

$$|C| = |A| \cdot |B|$$

Эслатма. Юқорида баён қилинган иккита тўплам учун қўшиш, кўпайтириш ҳамда киритиш - чиқариш қоидаларини чекли сондаги исталган чекли тўпламлар учун умумлаштириш мумкин.

Масалан, учта чекли A_1, A_2, A_3 тўпламлар учун

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

киритиш - чиқариш қоидаси ўринли.

Мисол. 40 нафар туристдан 20 нафари инглиз тилини, 15 нафари француз тилини, 11 нафари эса испан тилини биладилар. Инглиз ва француз тилларини етти нафар турист, инглиз ва испан тилларини беш нафар турист, француз ва испан тилларини эса уч нафар турист билади. Икки нафар турист учта тилни билгани маълум бўлса, туристлар ичида нечтаси бирор тилни ҳам билмайди?

Ечилиши. Инглиз тилини биладиган туристлар тўпламини E деб, француз тилини биладиган туристлар тўпламини F деб, испан тилини биладиган туристлар тўпламини эса I деб белгилаймиз. У ҳолда $|E|=20$, $|F|=$ 15, $|I|=11$, $\left|E\bigcap F\right|=7$, $\left|E\bigcap F\right|=5$, $\left|I\bigcap F\right|=3$, $\left|E\bigcap F\bigcap I\right|=2$.

Дастлаб камида битта тилда гаплашадиган туристлар сонини топамиз:

$$\left|E\bigcup F\bigcup I\right|=\left|E\right|+\left|F\right|+\left|I\right|-\left|E\bigcap F\right|-\left|E\bigcap I\right|-\left|F\bigcap I\right|+\left|E\bigcap F\bigcap I\right|=$$

$$=20+15+11-7-5-3+2=33$$

Демак, $40-33=7$ нафар турист бирор тилни ҳам билмайди.

Қандайдир предметлардан ташкил топган тузилмалар **комбинациялар** деб аталади.

Уч хил турдаги комбинациялар бор: ўрин алмаштириш, ўринлаштириш ва бирикмалар.

Ўрин алмаштиришлар

n та элементли ўрин алмаштиришлар деб, бир-биридан фақат элементларининг тартиби билан фарқ қиладиган n та элементли бирикмаларга айтилади. Масалан, 3 та A, B *va* C элементдан 6 та ўрин алмаштириш бажариш мумкин: ABC, BAC, ACB, CAB, CBA, BCA.

n та элементли ўрин алмаштиришлар сони қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$P_n=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\left(n-1\right)\cdot n=n!$$

Мисол. *Афсуски, бугун, ёмғир, ёғади* сўзларидан нечта гап тузиш мумкин?

Ечилиши. $P_4=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$.

Ўринлаштиришлар

Кўпинча, n та элементга эга бирор A тўплам элементларидан тузилган узунлиги m га тенг бўлган кетма-кетликлар сонини санаб чиқишга тўғри келади. Бунда кетма-кетлик элементлари орасидаги такрорланадиганлари бор бўлган ҳол ва бу элементларнинг барчаси ҳар ҳил бўлиши зарур ҳол алоҳида қаралади.

Биринчи ҳолда кетма-кетликлар *n та элементдан m тадан такрорли ўринлаштиришлар* деб аталиб уларнинг сони $\overline{A_n^m}$ билан, иккинчи ҳолда эса *такрорсиз ўринлаштиришлар* дейилиб, уларнинг сони A_n^m билан белгиланади. Бу икки миқдор учун формулалар қуйидагича:

$$\overline{A_n^m}=n^m,\ A_n^m=n(n-1)(n-2)....(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Бу ерда $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n,\quad 0!=1$ (n – факториал деб ўқилади)

Масалан, A алфавит n та белгидан ташкил топган бўлсин.

Узунлиги m га тенг бўлган сўзлар сонини санаб чиқайлик.

Сўзни ташкил этган белгилар орасидаги такрорланадиганлари бор бўлган ҳолда бундай сўзлар сони $\overline{A_n^m}$ га, бу белгиларнинг барчаси ҳар ҳил бўлган ҳолда A_n^m га тенг.

Энди узунлиги m дан кўп бўлмаган сўзлар сонини санаб чиқайлик.

Бунда жамлаш қоидасига кўра сўзларни ташкил этган белгилар орасидаги такрорланадиганлари бор бўлган ҳолда бундай сўзлар сони

$\sum_{k=0}^{n}\overline{A_n^k}=\overline{A_n^0}+\overline{A_n^1}+\overline{A_n^2}+\ldots+\overline{A_n^m}=1+n+n^2+n^3+\ldots+n^m$ га, бу белгиларнинг барчаси ҳар ҳил бўлган ҳолда $\sum_{k=0}^{n}A_n^k=A_n^0+A_n^1+A_n^2+\ldots+A_n^m$ га тенг.

Мисол. 20 та белгидан ташкил топган алфавит берилган бўлсин.

Узунлиги 3 га тенг бўлган сўзлар сонини санаб чиқайлик. Бунда белгиларнинг барчаси такрорланмасин.

Ечилиши. $A_{20}^3=20(20-1)(20-2)=6840$

Мисол. 20 та белгидан ташкил топган алфавит берилган бўлсин.

Узунлиги 3 га тенг бўлган сўзлар сонини санаб чиқайлик. Бунда белгиларнинг айримлари такрорланиши мумкин.

Ечилиши. $\overline{A_{20}^{3}} = 20^3 = 8000$.

Бирикмалар.

Агар элементлар тартиби назарда соқит қилинса, шундай масала вужудга келади: n элементли тўпламдан нечта m элементли турли қисм тўплам ажратиш мумкин? Бундай қисм тўпламлар *n та элементдан m тадан тузилган бирикмалар* дейилади.

Узунлиги n га тенг бўлган ва таркибида айнан m та a ҳарф бўлган $\underbrace{a...a}_{m}\underbrace{b...b}_{n-m}$ кўринишдаги сўз бундай бирикмани ташкил қилади.

Бирикмалар сони $C_n^m = \binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ формуласи билан ҳисобланади.

. **Анаграммалар.**

Фараз қилайлик, қандайдир сўзни ташкил қилган белгилар орасида айнан бир хил n_1 та биринчи тур, бир хил n_2 та иккинчи тур, ва ҳоказо, бир хил n_k та k - тур белгилар бўлсин, бу ерда n_1, $n_2, \dots n_k$ – натурал сонлар. Бу белгиларнинг ўринларини алмаштириш натижасида ҳосил бўлган сўзлар **такрорли ўрин алмаштиришлар** (**анаграммалар**) деб аталади.

Барча анаграммалар сонини $P(n_1, n_2, ..., n_k)$ билан белгиласак, у учун

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + ... + n_k)!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

формула ўринлидир.

М и с о л . КОМБИНАТОРИКА сўзидан нечта анаграмма тузиш мумкин?
Бу сўз иккита К, иккита О, битта М, битта Б, иккита И, битта Н, иккита А, битта Т ва битта Р ҳарфидан ташкил топган. Демак, анаграммалар (такрорли ўрин алмаштиришлар) сони

$P(2,2,1,1,2,1,2,1,1) = \dfrac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = \dfrac{13!}{16}$ бўлади. ■

Қизиқарли маълумот. Айрим адабиётларда нафақат сўзлардан, балки сўз бирикмалари ҳамда гаплардан ташкил топган анаграммалар қаралади.

Анаграммаларни тузиш – табиий тил сўзлари хамда гаплари билан комбинаторик машқларнинг қадимий тури бўлиб, унга 2000 йилдан ошди. Шуниси қизиқки ANAGRAMS сўзининг ҳарфларидан ARS MAGNA – буюк санъат (*лот.*) сўз бирикмасини тузиш мумкин.

Маълумки, француз қироли Людовик ўзининг қароргохида анаграммист лавозимини киритиб, унинг йиллик маошини 1200 ливр деб белгилаган.

Айрим анаграммалар нафақат маънога, балким дастлабки сўзга (ёки сўз бирикмасига) қарама-қарши маънодаги сўзни (ёки сўз бирикмасини) ташкил қилади.

Улардан айримларини келтирамиз:

1. evils agents (жаханнам элчилари) – evangelists (евангелистлар)
2. real fun (катта ҳурсандчилик) – funerals (дафн маросими)
3. nice love (нозик севги) – violence (зўрлаш)
4. no more stars (юлдузларга - йўқ) – astronomer (астроном)

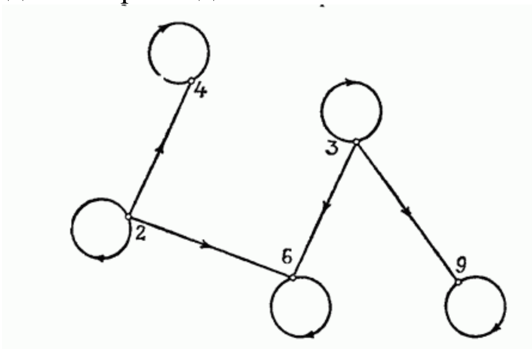
Графлар назарияси.

Комбинаторик масалаларни ечишда объектлар нуқталар, улар орасидаги боғланишлар эса чизиқлар билан тасвирлаш анча қўлайлик туғдиради.

Бунда ҳосил бўлган фигура ***граф*** , нуқталар графнинг *учлари*, туташтирувчи чизиқлар эса *қирралари* дейилади.

Графлар назарияси ҳозирги кунда комбинаториканинг энг жадал ривожланаётган соҳасига айланди. Графлар назарияси бўйича тадқиқотлар натижалари инсон фаолиятининг турли соҳаларида қўлланилади. Улардан баъзилари қуйидагилардир: бошқотирмаларни ҳал қилиш; қизиқарли ўйинлар; йўллар, электр занжирлари, интеграл схемалари ва бошқариш системаларини лойиҳалаштириш; автоматлар, блок-схемалар ва компьютер дастурларини тадқиқ қилиш ва ҳоказо.

Мисол. $V=\{2,3,4,6,9\}$ тўплам элементлари орасида учун “бўлувчиси бўлиш” муносабати қуйидаги ёрдамида тасвирланади:



Агар граф қиррасида йўналиш белгилланган бўлса бу қирра *ёй* ёки *ориентирланган қирра* дейилади. Барча қирралари ориентирланган бўлган граф *ориентирланган граф* (қисқача *орграф*) дейилади.

Агар бинар муносабат симметрик бўлса, мос бўлган граф ориентирланмаган бўлади.

Агар бинар муносабат рефлексив бўлса, мос бўлган графнинг ҳар бир учида сиртмоқ мавжуд.

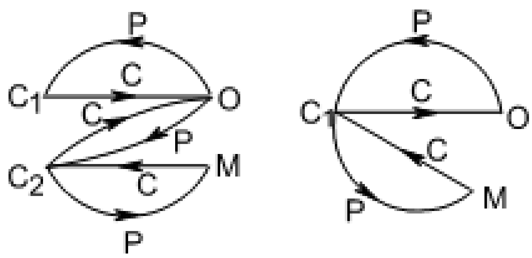
Агар бинар муносабат транзитив бўлса, мос бўлган граф учун (a,b) ва (b,c) қирралари билан бирга (a,c) қирраси ҳам мавжуд. Бундай граф *боғланган* граф дейилади.

Граф учидан чиққан қирралар сони жуфт (тоқ) бўлса, у ҳолда бу уч ўзи *жуфт* (*тоқ*) дейилади.

Граф тадбиқлари.

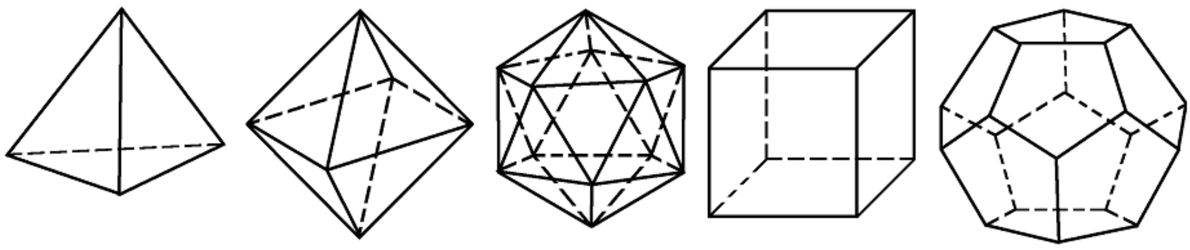
Бошқотирма. “Менинг опа-сингилларим ва ака-укаларим йўқ, аммо уша инсоннинг отаси – менинг отамнинг ўғли бўлади ”. Бу ҳолатни тушунтириб беринг.

Ечим. Орграфни чизамиз. Унинг элементларини қуйидагича белгилаймиз: C_1 − гапирувчи, M − уша инсон, C_2 − M нинг отаси, O − C_1 нинг отаси, C ва P ёйлар мос равишда “ўғли бўлиш ” и “отаси бўлиш ” муносабатлар. Кўриниб турибдики O да икки нафар C_1 ва C_2 ўғиллари бор. Улар ака-ука бўлиши керак, аммо масаланинг шартига кўра C_1 нинг ака-укалари йўқ. Бундай зиддият бўлмаслиги учун C_1 ва C_2 устма-уст тушиши шарт (расмга қаранг). Демак, O -бобо, C_1 (C_2) − унинг ўғли, M − ўғлнинг ўғли (бобонинг невараси). Юқорида санаб ўтилган инсонлар “бобо-ўғил-невара” кўринишдаги қариндошлик муносабатида турадилар.



Эйлер формуласи. Текисликда узилишларга эга бўлмаган ва қирралари кесишмайдиган граф берилган бўлсин. У текисликни бир нечта *ёнлар* деб аталувчи соҳаларга бўлади. Бундай граф учун Эйлер 1736 йили қаварик кўпёқлиларни текисликдаги графлар ёрдамида тасвирлаб $|V|-|E|+|F|=2$ формулани исботлади, бу ерда $|V|,|E|,|F|$ -мос равишда учлар, қирралар ва ёнлар сони.

Масала. Қуйидаги Платон кўпёқлилар деб аталадиган кўпёқлилар учун Эйлер формуласи ўринли эканлигини текширинг.



Тетраэдр **Октаэдр** **Икосаэдр** **Куб** **Додекаэдр**

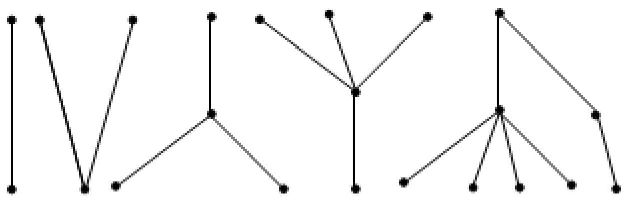
Шаҳарларни туташтириш ҳақида масала. Шаҳарлар орасида темир йўллар шундай ўтказилсинки, ҳар икки шаҳар фақат битта йўл билан туташтирилган бўлиб, темир йўлнинг умумий узунлиги энг кичик қийматни ташкил этсин. Бу масаланинг алгоритми мавжуд эмас.

Коммивояжер ҳақида масала. Коммивояжер бир нечта шаҳарни айланиб чиқмоқчи, бунда ҳар бир шаҳарга камида бир марта бориши ҳамда йўлнинг энг кичик узунлиги таъминланиши лозим. Бу масаланинг умумий алгоритми номаълум.

Тўрт бўёқ муаммоси. Сферада жойлашган харита 4 та рангга шундай бўяш мумкинки, бунда умумий чегарага эга бўлган ихтиёрий иккита давлат турли рангда бўлади.
Бу тасдиқ кўплаб олимларнинг узоқ вақт мобайнида бошини қотирганлиги билан машҳур. Уни 1976 йили Иллинойс университети профессорлари Кеннет Аппел ва Вольфганг Хакен томонидан компьютер ёрдамида исботланган.

Таъриф. n та учи ва $n-1$ та ёйга эга бўлган боғланган орграф *дарахт* дейилади.

Қуйидаги расмда дарахтлар келтирилган.

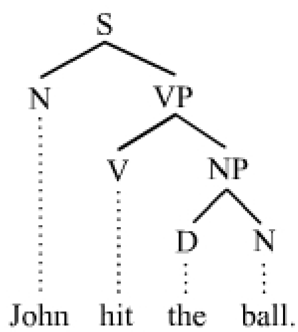


Дарахт тушунчаси кўп тадбиқларга эга.

Шажара. “Аждод-авлод” муносабат бўйича шажара дарахти чизилади.

Файллар тизими. Файллар ва каталоглар жойлашиши дараҳт кўринишида бўлади.

Гапнинг синтаксис таҳлили. Маълумки, сўз, сўз бирикмаси турли кўринишдаги мураккаб структураларни ҳосил қилади, бунда сўз синтаксиснинг энг кичик бирлиги бўлиб, у гап қурилиши учун ниҳоятда зарур. Синтаксис таҳлил муаммолари ва синтактик структураларни системалаш методлари замонавий лингвистикада марказий ўринни эгаллайди. Бунда сўз бирикмасининг, содда ва компонентларининг орасидаги боғланиш (масалан, ҳоким ва тобе сўзларнинг боғланиш) муносабатларини граф ёрдамида тасвирлаш мумкин. Жумладан, гап қурилишининг семантик ва синтактик муносабатлар дарахт ёрдамида ифодаланар экан.
Мисол тариқасида инглиз тилидаги “John hit the ball” гапнинг структураси қуйидаги дарахт ёрдамида ифодалаймиз[21]:

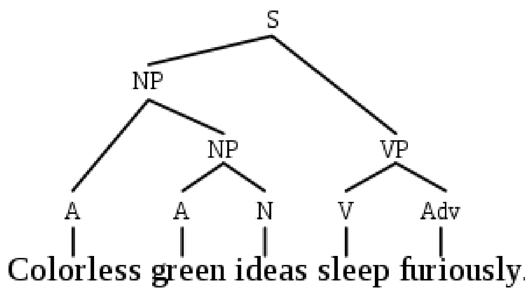


Бу ерда қуйидаги қисқартмалардан фойдаланилган:
S - гап, бу мисолдаги John, hit, the, ball сўзларни ўз ичига олган энг юқори даражали структура;

[21] http://en.wikipedia.org/wiki/Parse_tree

V - феъл; D – аниқловчи сўз (детерминатив, бу гапда "the" артикли); N – от; NP – таркибида битта от бўлган сўз бирикмаси (эга гуруҳи); VP – таркибида битта феъл бўлган сўз бирикмаси (кесим гуруҳи).

“Colorless green ideas sleep furiously” гапнинг структураси қуйидаги дарахт ёрдамида ифодаланади:



Синтактик муносабатларнинг структурасини билиш чет тилларни онгли ўзлаштиришда, турли мураккабликдаги матнларни таржима қилишда қўлайдир.

Сўзнинг семантик ҳоссаларини унинг морфологиясидан тушуниш мумкин экан.

Мисол: “Глокали куздра бокрни штекчасига будлантиб, бокрчани кирчатмокда” маъносиз гап қуйидаги “маъносини” келтирамиз[22]:

“Қайсидир нарса бошқа нарсага қандайдир қисқа таъсир қилиб, уша нарсанинг кичигига (боласига) узлуксиз ва кетма-кет таъсир кўрсатмоқда”. Масалан,
“Катта бўри қўзини қаттиқ тишлаб, қўзичоқни олиб кетмоқда”.

Ҳудди шундай “The iggle squiggs trazed wombly in the harlish hoop” маъносиз гап қуйидаги “маънога” эга: «Қандадир нарсалар бир нарса ичида қандайдир таъсир кўрсатмоқдалар » .

Топшириқ. Бу қадимий шеърнинг маъноси қоронғу бўлса ҳам, у дилимга чуқур таъсир қилди... Унинг маъносини тушунишга ҳаракат қилинг.

Jabberwocky

Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe;
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.

— Lewis Carroll[23]. Through the Looking-Glass

12-маъруза. Эҳтимолликлар назарияси (2 соат).

Таянч тушунчалар: Тасодифий ҳодиса. Эҳтимоллик тушунчаси. Эҳтимолликларни ҳисоблаш усуллари. Тасодифий миқдор. Тақсимот функцияси ва қонуни тушунчаси.

Тажриба – бу ўрганилаётган ҳодисанинг рўй бериши мумкин бўлган шарт-шароитлар мажмуаси.

Масалан, матнда содда гапларни санаб олиш - тажриба, мавжуд содда гаплар сони 46 га тенг бўлиши эса ҳодисадир.

[22] http://ru.wikipedia.org/wiki/Глокая_куздра
[23] Charles Lutwidge Dodgson (1832 –1898), better known by his pen name, Lewis Carroll, was an English writer, mathematician, logician, Anglican deacon and photographer. His most famous writings are Alice's Adventures in Wonderland, its sequel Through the Looking-Glass, which includes the poem Jabberwocky, and the poem The Hunting of the Snark, all examples of the genre of literary nonsense.

Тажриба тушунчасига бошқа мисоллар: симметрик, бир жинсли тангани бир марта ташлаш, ёки адабий матнда феълларни санаб олиш.

Тажрибанинг натижаси *тасодифий ҳодиса* деб аталади.

Тажриба натижасида ҳар гал рўй берадиган ҳодиса *муқаррар* ҳодиса, хеч қачон рўй бермайдиган ҳодиса эса *мумкин бўлмаган* ҳодиса дейилади.

Масалан, A - биро сўзда "бў" ҳарфлар бирикмасида "ў" ҳарфидан кейин "л" ҳарфнинг пайдо бўлиши" тасодифий ҳодиса, B - "л" ёки "р" ҳарфининг пайдо бўлиши" муқаррар ҳодиса, C - "сакр-" ҳарфлар бирикмасида "р" ҳарфидан кейин "т" ҳарфининг пайдо бўлиши" эса мумкин бўлмаган ҳодисадир.

Агар $A\cdot\overline{A}=\varnothing$ ва $A+\overline{A}=\Omega$ бўлса, у ҳолда $\overline{A}$ ҳодиса A ҳодисага *қарама-қарши* ҳодиса дейилади.

Мисоллар.

1. Тажриба симметрик, бир жинсли тангани бир марта ташлашдан иборат бўлсин. Бунда элементар ҳодисалар қуйидагича бўлади:

$\omega_1=\{\Gamma\}$ -тангани ташлашда герб тушиши ҳодисаси.

$\omega_2=\{P\}$ -тангани ташлашда рақам тушиши ҳодисаси.

Бу тажрибада элементар ҳодисалар фазоси Ω 2 та элементдан иборат: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$

Элементар ҳодисалар сони $N=2^2=4$

2. Тажриба ёқлари бирдан олтигача номерланган бир жинсли ўйин кубигини 1 марта ташлашдан иборат бўлсин. Бу ҳолда элементар ҳодисалар қуйидагича бўлади:

$\omega_1=\{1\}$ -кубни ташлашда 1 очко тушиш ҳодисаси.

$\omega_2=\{2\}$ -кубни ташлашда 2 очко тушиш ҳодисаси.

$\omega_3=\{3\}$ -кубни ташлашда 3 очко тушиш ҳодисаси.

$\omega_4=\{4\}$ -кубни ташлашда 4 очко тушиш ҳодисаси.

$\omega_5=\{5\}$ -кубни ташлашда 5 очко тушиш ҳодисаси.

$\omega_6=\{6\}$ -кубни ташлашда 6 очко тушиш ҳодисаси.

Бу тажрибада элементар ҳодисалар фазоси Ω 6 та элементдан иборат:

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$$

3. Тажриба нуқтани [0;1] сегментга тасодифий равишда ташлашдан иборат бўлсин.

Бу ҳолда элементар ҳодиса ω сифатида [0;1] сегментнинг ихтиёрий нуқтасини олиш мумкин. Бу тажрибада Ω элементар ҳодисалар фазоси [0;1] тўпламдан иборат.

Айтиб ўтганларимизни якунлаб, бундай хулоса қилишимиз мумкин: ҳар қандай тажриба рўй бериши мумкин бўлган элементар ҳодисалар тўплами билан боғлиқ.

Эҳтимолликлар назарияси тасодифий ҳодисаларни рўй бериш қонуниятларини ўрганади. Шунинг учун тасодифий ходиса руй бериши имкониятларини билдириш учун махсус функция – эҳтимоллик киритилиши лозим.

Таъриф. A ҳодисанинг *классик эҳтимоллиги* деб, тажрибанинг қулайлик берувчи натижалари сонини уларнинг барча натижалари сонига нисбатига айтилади ва $\mathbb{P}(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}$ билан аниқланади.

Кўриниб турибдики, иҳтиёрий тасодифий ҳодисанинг эҳтимоллиги мусбат сон бўлиб, у 0 ва 1 орасида бўлади: $0\le\mathbb{P}(A)\le1$. Бунда муқаррар ҳодисанинг эҳтимоллиги 1 га тенг ($\mathbb{P}(\Omega)=1$), мумкин бўлмаган ҳодисаларнинг эҳтимоллиги эса 0 га тенг ($\mathbb{P}(\varnothing)=0$)

Эҳтимолликни топишга доир масалаларни ечишда комбинаторика элементлари муҳим роль ўйнайди.

Эҳтимолликнинг классик таърифи формуласидан тажрибалар натижалари фақат тенг имкониятли бўлгандагина фойдаланиш мумкин. Аммо амалиётда эса мумкин бўлган холлар тенг имкониятли бўлавермаслигини ёки бизни қизиқтираётган ҳодиса учун қулайлик яратувчи ҳолларни аниқлаб бўлмаслигини кўришимиз мумкин. Бундай ҳолларда тажрибани муайян шароитда боғлиқсиз равишда кўп марта такрорлаб, ҳодиса нисбий такрорланишини кузатиб, унинг эҳтимоллигини тақрибан аниқлаш мумкин бўлади.

Тасодифий ҳодиса A нинг нисбий такроланиши деб шу ҳодисанинг рўй берган тажрибалар сони $n\ (A)$ нинг ўтказилган тажрибалар умумий сони n га нисбатига айтилади.Тажрибалар сони етарлича катта $n \to \infty$ бўлганида кўп ҳодисаларнинг нисбий такрорланиши маълум қонуниятга эга бўлади ва бирор сон атрофида тебраниб туради. Бу қонуният XVIII аср бошларида Янов Бернулли томонидан аниқланган.Унга асосан боғлиқ бўлмаган тажрибалар сони чексиз ортиб борганида ($n \to \infty$) муқаррарликка яқин ишонч билан ҳодисанинг нисбий такрорланиши унинг рўй бериш эҳтимоллигига етарлича яқин бўлиши тасдиқланади. Бу қонуният ўз навбатида эҳтимолликнинг статистик таърифи деб аталади.

Демак, етарлича катта n лар учун $\dfrac{n(A)}{n} \approx P(A)$

Эҳтимоллик тушунчасига бундай ёндашишлар ёрдамида тилшунослар томонидан турли матнларда сўзларнинг ҳамда ҳарфларнинг нисбий такроланиши ўрганилади.

Жадвал. Инглиз тилидаги ҳарфларнинг матнларда нисбий такроланиши

Ҳарф	**нисбий такроланиши, %**	**Ҳарф**	**нисбий такроланиши, %**	**Ҳарф**	**нисбий такроланиши, %**
A	8.1	K	0.4	V	0.9
B	1.4	L	3.4	W	1.5
C	2.7	M	2.5	X	0.2
D	3.9	N	7.2	Y	1.9
E	13.0	O	7.9	Z	0.1
F	2.9	P	2.0		
G	2.0	R	6.9		
H	5.2	S	6.1		
I	6.5	T	10.5		
J	0.2	U	2.4		

Аммо статистик таърифнинг ноқулайлик томонлари бор. У тажрибаларнинг сони орттирилишини талаб қилади. Бу эса амалиётда кўп вақт ва харажатларни талаб қилиши мумкин.

Таъриф. Қийматлари тасодифий ҳодиса бўлган ҳақиқий ўзгарувчи *тасодифий миқдор* дейилади.

Амалий масалаларда X тасодифий миқдор билан боғлиқ бўлган қўйидаги кўринишдаги тасодифий ҳодисалар кўп учрайди:

1) $X = a$, 2) $X < b$, 3) $a \le X < b$.

Шундай ҳодисалар эҳтимолликларини ҳисоблаш ёки баҳолаш учун қўйидаги *тасодифий миқдор тақсимот функцияси* деб аталувчи махсус функсия ҳизмат қилади :

$$F(x) = P(X < x)$$

Тақсимот функцияси қўйидаги ҳоссаларга ега:

а) $F\ (+\infty)=1,\ F\ (-\infty)=0$; б) $F\ (x)$ – монотон камаймайди.

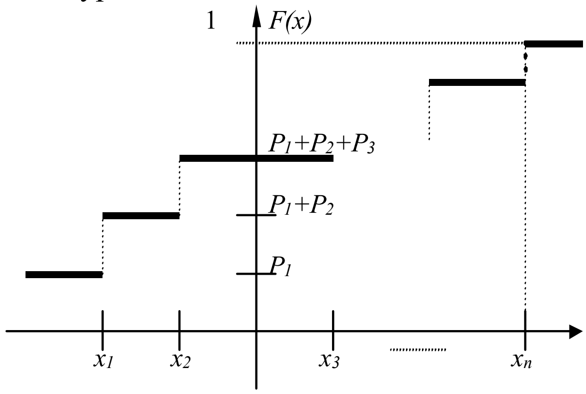
$a \le X < b$ ходисанинг эҳтимоллиги қўйидагича топилади:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

Агар тасодифий миқдор қийматлар тўплами ё чекли ё саноқли бўлса, у ҳолда унга *дискрет тасодифий миқдор*, акс ҳолда эса *узлуксиз тасодифий миқдор* дейилади.

Дискрет тасодифий миқдор ўзининг $x_1, x_2, ..., x_n$ қийматлари мос равишда $p_1, p_2, ..., p_n$ эҳтимолликлари билан характерланиб, уни $X = \begin{Bmatrix} x_1, x_2, ..., x_n \\ p_1, p_2, ..., p_n \end{Bmatrix}$ кўринишда тасвирлаш мақсадга мувофиқ . (Равшанки бунда $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$).

$x_1, x_2, ..., x_n$ қийматларни ўсиш тартибида жойлаштирилган деб фараз қилсак, у ҳолда тақсимот функцияси қуйидаги кўринишга эга:



Биномиал тақсимот.

n та синашдан иборат бўлган тажриба Бернулли синаш системаси дейилади агар

а) ихтиёрий синашда A ҳодисанинг рўй бериши p эҳтимоллиги унинг бошқа синашларда рўй бериш-бермаслигига боғлиқ эмас;

б) исталган синаш фақат A ва $\overline{A}$ ўзаро қарама-қарши оқибатга эга, бунда $\overline{A}$ ҳодисанинг эҳтимоли $q = 1 - p$ га тенг.

$P(n,m)$ орқали n та синашдан иборат бўлган тажриба мобайнида A ҳодиса m марта рўй бериши эҳтимоллиги қуйидагича топилади:

$$P(n,m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (1)$$

Агар тасодифий миқдор чекли сондаги $m = 0,1,2,...,\ n$ қийматларни $P(n,m)$ эҳтимоллик билан қабул қилса, у ҳолда унга *биномиал қонун бўйича тақсимланган* тасодифий миқдор дейилади.

1-*Мисол.* Ўғил бола туғилишининг эҳтимоллиги 0,515 га тенг. Таваққал танланган 10 та чақалоқдан 6 таси ўғилбола бўлишининг эҳтимоли тахминан

$P(10,6) = C_{10}^6 (0,515)^m (0,485)^4 \approx 0,2167$ га тенг.

2-*Мисол.* Маҳсулотнинг носоз бўлишининг эҳтимоллиги 0,01 га тенг. Таваққал танланган 100 махсулотдан 3 та дан ортиқ носоз махсулот чиқишининг эҳтимоллиги

$P(100,0) + P(100,1) + P(100,1) =$

$C_{100}^0 (0,01)^0 (0,99)^{100} + C_{100}^1 (0,01)^1 (0,99)^{99} + C_{100}^2 (0,01)^2 (0,99)^{98} \approx 0,9816$ га тенг.

Нормал тақсимот хақида тушунча.

$F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$ кўринишдаги тақсимот функциясига эга бўлган тасодифий миқдор нормал тақсимланган дейилади, бу йерда a, σ - тақсимот параметрлари.

Агар тасодифий миқдор сони етарлича катта бўлган ва бир-бирига боғлиқ бўлмаган қўшилувчиларнинг йиғиндисига тенг бўлса, у ҳолда ушбу тасодифий миқдорнинг нормал тақсимланган деб фараз қилиш мумкин.

Лаплас формулалари.

Биномиал тақсимоти учун $P(n,m_0) = P(m = m_0)$ va $P(m_1 \le m \le m_2)$ эҳтимолликларни ҳисоблашларда қуйидаги тақрибий формулалар қўлланилади

$$P(n,m_0) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(t_0) \quad \text{(Лаплас локал формуласи)}$$

$P(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1)$ (Лаплас интеграл формуласи, бу ерда $\Phi_0(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$ - Лаплас функцияси) бу ерда $t_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = 0,1,2$, φ ва Φ_0 функциялар учун махсус жадвал тузилган

Мисол. Маҳсулотнинг носоз бўлишининг эҳтимоли 0,005 га тенг. Таваққал танланган 10000 махсулотдан

а) 40 та си

б) 70 дан ортиқ бўлмаган

носоз махсулот чиқишининг эҳтимолликларини топинг.

Йечиш. а) $np=50$, $\sqrt{npq}=7{,}05$, $t_0 = \dfrac{m_0 - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{40-50}{7{,}05} = -1{,}42$.

$$P(10000,40) \approx \frac{1}{7{,}05}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(1{,}42)^2} == \frac{1}{7{,}05}\varphi(1{,}42)$$

φ функциянинг қийматлар жадвалидан φ(1,42)=0,1456 топамиз. Демак, $P(10000,40) \approx 0{,}0206$.

б) $P(m_1 \le m \le m_2) = P(0 \le m \le 70) \approx \Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1)$,

$$t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-50}{7{,}05} = -7{,}09, \quad t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70-50}{7{,}05} = 2{,}84.$$

$\Phi_0(-m) = -\Phi_0(m)$ бўлгани учун $\Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1) = \Phi_0(2{,}84) + \Phi_0(7{,}09)$.

Φ_0 функциянинг қийматлар жадвалидан φ(2,84)=0,4977 топамиз. Φ_0 (*7,09*) қиймат 0,5 га жуда яқин бўлгани учун у жадвалда йўқ. Демак, $P(0 \le m \le 70) \approx 0{,}9977$.

Табиатда учрайдиган деярли барча тасодифий миқдорлар сони етарлича катта бўлган ва бир-бирига боғлиқ бўлмаган қўшилувчиларнинг йиғиндисига тенг , шунинг учун бу тасодифий миқдорларни нормал тақсимланган деб фараз қилиш мумкин.

13-маъруза. Математик статистика асослари (2 соат).

Танланма ва унинг характеристикалари. Педагогик тажриба натижаларини қайта ишлашнинг статистик методлари.

Статистика сўзи лотинча сўздан олинган бўлиб, ҳолат, вазият деган маънони англатади.

Статистика табиатда ва жамиятда бўладиган оммавий ҳодисаларни ўрганади. Статистика фани қонуниятларни аниқлаш мақсадида оммавий тасодифий ҳодисаларни кузатиш натижаларни тасвирлаш, тўплаш, системалаштириш, таҳлил этиш ва изоҳлаш усулларини ўрганади.

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА - статистик маълумотларни тўплаш, улар-ни тизимга солиш, қайта ишлаш ҳамда улардан илмий ва амалий хулосалар чиқариш усулларини ўрганадиган фан. Статистик маълумотлар деганда муайян (микдорий) белгиларга эга бўлган мажмуаларнинг элементлари сони ҳақидаги маълумотлар тушунилади.

Бирор мажмуа элементларининг му-айян белгилари тўғрисида шу ҳакдаги статистик маълумотларга қараб у ёки бу хулосага келиш усули статистик усул дейилади. Бу усул илм-фаннинг жуда кўп соҳаларида кенг қўлланилади. Статистик усулнинг турли соҳалардаги татбиқларининг умумий хислатлари (бирор гуруҳга кирувчи элементларни ҳисоблаш, микдорий белгиларнинг тақсимотларини топиш, танламалар усулини қўллаш, бирор хулосага келиш учун зарур бўлган тажрибалар сонини эҳтимоллар назариясидан фойдаланиб топиш, микдорий белгилар орасидаги боғланишларни аникдаш ва ҳ. к.), яъни ўрганилаётган объектларнинг табиати аҳамиятсиз бўлган масалалар математик статистиканинг предметини ташкил қилади. Статистик усул кўп ҳолларда оммавий таснифли ҳодисаларни ўрганиш усули бўлгани учун эҳти-моллар назарияси бу усулнинг назарий асосини ташкил қилади. Математик статистика баёний статистика, номаълум параметрларни баҳолаш, статистик гипотезаларни текшириш, микдорий белгиларнинг статистик боғланишларини аниқлаш ва бошқа бўлимлардан иборат.

Баёний статистика статистик маълумотлар (тажриба натижалари)ни дастлабки ўрганиш билан шуғулланади.

Энди математик статистиканинг асосий масалаласи билан танишиб чиқамиз:

Фараз қилайлик, ξ тасодифий миқдор устида n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тажриба ўтказиб, $x_1, x_2, ...x_n$ қийматларни олган бўлайлик. $x_1, x_2, ...x_n$ лар бўйича ξ тасодифий миқдорнинг номаълум $F(x)$ тақсимот функциясини ёки турли сонли параметрларини баҳолаш математик статистиканинг вазифаларидан биридир.

Педагогик муаммони ҳал етишда ижодий ёндашишнинг энг ишончли усулларидан бири тажриба усулики, бу усул асосида аниқ билимлар олинади, назарий гипотеза тасдиқланади ва самарали амалий тавсиялар ишлаб чиқилади. Бу усул педагогик - психологияда амалий - назарий тадқиқотларни математик статистика жиҳатидан таҳлил этишда қўлланилади.

Иҳтиёрий *педагогик тажрибанинг мақсади* таклиф этилган *педагогик таъсирнинг* (масалан таълимнинг ноанъанавий методикаси, шакли, усуллари ва х.к.) самаралигини исботлашдан иборат.

Шунинг бу ноанъанавий таъсирнинг ўқувчиларнинг бирор гуруҳига қўлланилиши анъанавий таъсирларга нисбатан бошқа натижаларникўрсатиш керак.

Тажриба бошида *тажриба* ва *назорат гуруҳлари* танлаб олинади.

Тажриба бошида ва оҳирида *тажриба гуруҳининг* кўрсаткичлари *назорат гуруҳи* билан солиштирилади..

Агар тажриба бошида шу гуруҳлар кўрсаткичлари бир ҳил бўлиб, педагогик таъсирдан сўнг бу кўрсаткичлар фарқланса, у ҳолда педагогик таъсирнинг самаралиги исботланади.

Демак, жами бўлиб иккита солиштириш талаб қилинади. Бунда қуйидагилар исботланиши зарур:

- Дастлабки (педагогик тажрибадан олдин олинган) солиштиришда тажриба ва назорат гуруҳларнинг характеристикалари бирҳиллигини
- Иккинчи (педагогик тажрибадан сўнг олинган) солиштиришда тажриба ва назорат гуруҳларнинг характеристикалари ҳар ҳил эканлигини.

Педагогик тажрибанинг объектлари ўқувчилар бўлгани учун, уларнинг кўрсаткичлари устма-уст тушиш -тушмаслиги тасодифий ҳодисадир.

Шунинг учун шундай ҳулосалар статистика усулларга таянади.

Статистик мезонларни қўллашнинг содда: педагогик тажриба бошланишидан олдин ва сўнг кузатишлар натижаларига қараб мезоннинг эмпирик қиймати ҳисобланади. Бу қиймат маълум бўлган сон (мезоннинг критик қиймати) билан солиштирилади.

Агар мезоннинг эмпирик қиймати критик қийматдан кичик ёки тенг бўлса, қуйидаги ҳулоса қабул қилинади:

Тажриба ва назорат гуруҳларнинг характеристикалари танланган статистик мезон бўйича 0,95 эҳтимоллик билан устма-уст тушади.

Агар мезоннинг эмпирик қиймати 1,96 критик қийматдан катта бўлса, қуйидаги ҳулоса қабул қилинади:

" Тажриба ва назорат гуруҳларнинг характеристикалари танланган статистик мезон бўйича 0,95 эҳтимоллик билан фарқланади".

Мисол. Крамер-Уэлч (*Стьюдент*) *мезони*[24]

Тажриба-синов майдонига жалб қилинган ўқувчилар танлаб олиниб, улар тажриба (25 нафар) ва назорат (30 нафар) гуруҳларига ажратилди.

N = 25, M = 30. Уларга 20 та тест топшириғи берилди.

Ўқувчининг характеристикаси этиб, туғри ечилган тест саволлари сонини танлаймиз.

Тажриба-синов ишларида иштирок этган ўқувчиларнинг эришган натижалари жадвалда келтирилган.

---

[24] Мазкур мезон Ирландиянинг Гинесс компанияси пиво заводларида маҳсулотнинг сифатини баҳолаш учун Уильямом Госсет томонидан ишлаб чиқилган. Бу олим компания билан тижорат сири тғғрисидаги битимни имзолаганлиги боис мезонга бағишланган мақола 1908 йили «Биометрика» илмий журналда Student тахаллуси остида чоп этилган.

и экспериментальной группы до и после эксперимента

Контрольная группа (число правильно решенных задач до начала эксперимента)	Экспериментальная группа (число правильно решенных задач до начала эксперимента)	Контрольная группа (число правильно решенных задач после окончания эксперимента)	Экспериментальная группа (число правильно решенных задач после окончания эксперимента)
15	12	16	15
13	11	12	18
11	15	14	12
18	17	17	20
10	18	11	16
8	6	9	11
20	8	15	13
7	10	8	7
8	16	6	14
12	12	13	17
15	15	17	19
16	14	19	16
13	19	15	12
14	13	11	15
14	19	9	19
19	12	19	18
7	11	8	14
8	16	6	13
11	12	9	18
12	8	12	13
15	13	11	13
16	7	17	15
13	15	10	18
5	8	8	9
11	9	8	14
19	–	20	–
18	–	19	–
9	–	6	–
6	–	14	–
15	–	10	–

Қуйидаги эмпирик қиймат ҳисобланади

$$T_{эмп} = \frac{\sqrt{M \cdot N}\,|\overline{x} - \overline{y}|}{\sqrt{M \cdot D_x + N \cdot D_y}}$$

Бу ерда

$$\overline{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

- ўртача қиймат;

$$D_x = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2$$

- дисперсия;

Тажриба бошида эмпирик қиймат *Тэмп* = 0,04 $\leq$ 1,96 бўлгани учун тажриба ва назорат гуруҳларнинг характеристикалари танланган статистик мезон бўйича 0,95 эҳтимоллик билан устма-уст тушади.

Тажрибадан сўнг эса *Тэмп* = 2,42 > 1,96 бўлгани учун тажриба ва назорат гуруҳларнинг характеристикалари танланган статистик мезон бўйича 0,95 эҳтимоллик билан фарқланади. Демак, тажриба-синов ишларидаги ўқувчилар билим даражаларининг назорат гуруҳларидан фарқи бўлиб, олиб борилган методикамизнинг самарадор эканлиги исботланди.

Тавсия этилган адабиётлар рўйхати

Асосий адабиётлар

1. [Ж] Жўраев Т.Ж. ва бошқалар. Олий математика асослари.1,2-қисм. Тошкент, 1995
2. [Г1] Грес П.В. Математика для гуманитариев. Учебное пособие. Москва. Университетская книга, Логос, 2007.
3. [С] Соатов Ё.У. Олий математика. I,II,III т. Т.Ўқитувчи, 1992-1995й.
4. [R] Rajabov F. va boshqalar. Oliy matematika 1-qism. - T.: Ijod dunyosi nashriyot uyi. 2003 y.
5. [A1] Абдалимов Б., Солихов Ш.. Олий математика қисқа курси.-Т.: "Ўқитувчи", 1981 й.
6. [A2] Абдалимов Б. Олий математика курсидан мисол ва масалалар ечиш. –Тошкент, 2001 й.
7. [Г2] Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Тошкент, Ўқитувчи, 1980.

Қўшимча адабиётлар

1. [М] Мациевский С. В. Математическая культура: Учебное пособие / Калининград: Изд-во КГУ, 2001.
2. [R2] Rayemov M., Saliyev A. Oliy matematikadan mustaqil ishlar. O’quv qo’llanma. T.: “IQTISOD-MOLIYA”, 2005 yil, 54 bet
3. [У] Уилсон Р. Введение в теорию графов.— М.: Мир, 1977.
4. [Ф] Фомин А.Т. Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире.— М.: МГУ, 1998.
5. [П] Пентус А. Е., Пентус М. Р. Теория формальных языков: Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2004.

Интернет сайтлари

http://ziyonet.uz — Ziyonet ахборот-таълим ресурслари портали
http://www.matholymp.zn.uz/123 - фан бўйича дидактик материаллар.
http://www.wikipedia.org – онлайн энциклопедия.
http://www.etudes.ru – математик этюдлар.
http:// www.geometr.info/ - Геометрия олами
http://www.mccme.ru/ - Москва узлуксиз математик таълими маркази.
http://www.problems.ru/ - «Математик масалалар» интернет лойиҳаси.
http://mathworld.ru/ - қизиқарли математика .
http:// www.mathforyou.net – математик масалаларнинг онлайн тариқасида ечиш портали.
http://www.msu.ru –Москва Давлат Университети портали
http://www.edu.ru/ - "Россия таълими" портали