56-Xalqaro Matematika olimpiadasida qatnashish uchun tanlovning birinchi bosqich topshiriqlari

1-masala. $x^4-9^y=2400$ tenglamani butun sonlarda yeching.

2-masala. Qaysi a,b lar uchun $x^4-x^3+(a+b-2)x^2+(b-2a)x+ab=0$ tenglama geometrik progressiyani tashkil etgan to'rtta haqiqiy yechimga ega?

3-masala. $\mathbb{R}$ - haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Barcha $x,y\in\mathbb{R}$ sonlar uchun

$$f(x+xy)=f(x)(2y+1)+f(xy)$$

tenglikni qanoatlantirgan barcha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funksiyalarni toping.

4-masala. $ABCD$ trapetsiyada $BC=4$, $AD=9$, $BC\parallel AD$. Mos ravishda AB va CD tomonlarga tegishli K va L nuqtalar uchun $\angle BCK=\angle ACK$, $\angle CAL=\angle DAL$ va $KL\parallel AD$. AC diagonal uzunligini toping.

5-masala. $SA\le 4$, $SB\ge 7$, $SC\ge 9$, $AB=5$, $BC\le 6$, $AC\le 8$ shartlarni qanoatlantiradigan $SABC$ piramida hajmining eng katta qiymatini toping.

***Izoh**. Ajratilgan vaqt: 4,5 soat. Har bir masala maksimal 10 ball bilan baholanadi. Qoralamalar topshirilmasin.*

Задания первого этапа отбора для участия на 56-ой Международной математической олимпиаде

Задача №1. Решить в целых числах уравнение $x^4-9^y=2400$.

Задача №2. При каких a,b уравнение $x^4-x^3+(a+b-2)x^2+(b-2a)x+ab=0$ имеет четыре действительных решения, образующих геометрическую прогрессию?

Задача №3. Пусть $\mathbb{R}$ -множество действительных чисел. Найти все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие для всех $x,y\in\mathbb{R}$ равенству $f(x+xy)=f(x)(2y+1)+f(xy)$.

Задача №4. В трапеции $ABCD$ $BC=4$, $AD=9$, $BC\parallel AD$. На сторонах AB и CD отмечены точки K и L соответственно, так, что $\angle BCK=\angle ACK$, $\angle CAL=\angle DAL$ и $KL\parallel AD$. Найти длину диагонали AC.

Задача №5. Найдите наибольшее значение объёма пирамиды $SABC$ при следующих ограничениях: $SA\le 4$, $SB\ge 7$, $SC\ge 9$, $AB=5$, $BC\le 6$, $AC\le 8$.

***Примечание**. Отведенное время: 4,5 часа. Каждая задача оценивается максимальными 10 баллами. Черновики не сдавать.*